解析学 II-1：中間試験（2019-11-21）

学籍番号______________________________　　　　氏名______________________________

問題 1　次の関数 f の 1 階，2 階，3 階偏導関数をすべて求めよ．

(a)　$f(x, y) = \cos(\alpha x + \beta y)$　(b)　$f(x, y, z) = ax^2 + by^2 + cz^2 + pxy + qxz + ryz + sx + ty + uz + v$

問題 2　連鎖律を用いて次の問いに答えよ．

(a) 関数 $z = \exp(x^2 + y^2)$ の変数 x, y は，変数 t の関数としてそれぞれ $x = \sin t$，$y = \sin 2t$ により与えられているとする．このとき導関数 $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$ を t の関数として表せ．

(b) 関数 $w = \sin(xy - z)$ の変数 x, y, z は，変数 s, t の関数としてそれぞれ $x = st^2$，$y = 2s + t$，$z = s - 2t$ により与えられているとする．このとき偏導関数 $\frac{\partial w}{\partial s}, \frac{\partial w}{\partial t}$ を s, t の関数として表せ．

問題 3　関数 $f(x,y)=\exp(x-y)$ を考える．

(a)　偏導関数 $\frac{\partial^{i+j} f}{\partial x^i \partial y^j}$ （$i,j=0,1,2,\dots$）を求めよ．

(b)　次の定理 T を用いて f の点 $(1,0)$ でのテイラー展開を求めよ．

定理 T　関数 $f(x_1,\dots,x_n)$ は，相異なる 2 点 $\boldsymbol{a}=(a_1,\dots,a_n)$，$\boldsymbol{x}=(x_1,\dots,x_n)$ を端点とする線分 $I=\{(1-t)\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{x};\ t\in[0,1]\}$ を含む領域上 C^{N+1} 級とする．このとき点 $\boldsymbol{\xi}\in I\setminus\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{x}\}$ が存在して

$$
\begin{aligned}
f(\boldsymbol{x}) &= \sum_{k=0}^{N} \sum_{i_1+\cdots+i_n=k} \frac{1}{i_1!\cdots i_n!} \frac{\partial^k f}{\partial x_1^{i_1}\cdots \partial x_n^{i_n}}(\boldsymbol{a})(x_1-a_1)^{i_1}\cdots(x_n-a_n)^{i_n} + R_N, \\
R_N &= \sum_{i_1+\cdots+i_n=N+1} \frac{1}{i_1!\cdots i_n!} \frac{\partial^{N+1} f}{\partial x_1^{i_1}\cdots \partial x_n^{i_n}}(\boldsymbol{\xi})(x_1-a_1)^{i_1}\cdots(x_n-a_n)^{i_n}.
\end{aligned}
$$

問題 4　関数 $f(x,y)=x^2+xy+y^3$ を考える．

(a) f の停留点を求めよ．

(b) f のヘッセ行列を求めよ．

(c) (b) で求めた停留点で f が極大・極小になるか調べよ．

問題 5　条件 $x^2+y^2=1$ の下で関数 $f(x,y)=x+2y$ が極大・極小になる点を探す．

(a) 次の定理 L を用いて f が $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ x^2+y^2=1\}$ 上極大・極小になる点の候補を求めよ．

定理 L　関数 f,g は開集合 $U\subset\mathbb{R}^n$ 上 C^1 級とし $f'=(\frac{\partial f}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial f}{\partial x_n})$，$g'=(\frac{\partial g}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial g}{\partial x_n})$ とおく．f は $g'(\boldsymbol{a})\neq\mathbf{0}$ を満たす点 $\boldsymbol{a}\in A:=\{\boldsymbol{x}\in U;\ g(\boldsymbol{x})=0\}$ で A 上極大または極小になるとする．このとき定数 $\lambda\in\mathbb{R}$ が存在して $f'(\boldsymbol{a})=\lambda g'(\boldsymbol{a})$ が成り立つ．

(b) 次の定理 I を用いて (a) で求めた点で f が A 上極大・極小になるか調べよ．

定理 I　関数 $g(x_1,\dots,x_n,y)$ は開集合 $U\subset\mathbb{R}^{n+1}$ 上 C^1 級とする．g は点 $(\boldsymbol{a},b)=(a_1,\dots,a_n,b)\in U$ で $g(\boldsymbol{a},b)=0$ かつ $g_y(\boldsymbol{a},b)\neq 0$ を満たすとする．このとき点 $\boldsymbol{a}$ を含む領域 I と点 b を含む開区間 J および C^1 級関数 $\gamma:I\to J$ が存在して次が成り立つ：

(i) $b=\gamma(\boldsymbol{a})$.

(ii) 任意の点 $\boldsymbol{x}\in I$ および $y\in J$ に対して $g(\boldsymbol{x},y)=0\Leftrightarrow y=\gamma(\boldsymbol{x})$.

(iii) 任意の点 $\boldsymbol{x}\in I$ に対して $g_y(\boldsymbol{x},\gamma(\boldsymbol{x}))\neq 0$ かつ $\gamma_{x_j}(\boldsymbol{x})=-\frac{g_{x_j}(\boldsymbol{x},\gamma(\boldsymbol{x}))}{g_y(\boldsymbol{x},\gamma(\boldsymbol{x}))}$ $(j=1,\dots,n)$.

解答例（解析学 II-1：中間試験）

問題 1 (a) 1 階：$f_x = -\alpha\sin(\alpha x+\beta y)$，$f_y = -\beta\sin(\alpha x+\beta y)$．2 階：$f_{xx} = -\alpha^2\cos(\alpha x+\beta y)$，$f_{xy} = -\alpha\beta\cos(\alpha x+\beta y)$，$f_{yy} = -\beta^2\cos(\alpha x+\beta y)$，3 階：$f_{xxx} = \alpha^3\sin(\alpha x+\beta y)$，$f_{xxy} = \alpha^2\beta\sin(\alpha x+\beta y)$，$f_{xyy} = \alpha\beta^2\sin(\alpha x+\beta y)$，$f_{yyy} = \beta^3\sin(\alpha x+\beta y)$．
(b) 1 階：$f_x = 2ax+py+qz+s$，$f_y = 2bx+px+rz+t$，$f_z = 2cx+qy+ry+u$．2 階：$f_{xx} = 2a$，$f_{yy} = 2b$，$f_{zz} = 2c$，$f_{xy} = p$，$f_{xz} = q$，$f_{yz} = r$．3 階偏導関数はすべて 0．

問題 2 (a) 連鎖律より $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = (2x\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + 2y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t})\exp(x^2+y^2) = (2\sin t\cos t + 4\sin 2t\cos 2t)\exp(\sin^2 t+\sin^2 2t)$．
(b) 連鎖律より $\frac{\partial w}{\partial s} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial s} = (y\frac{\partial x}{\partial s} + x\frac{\partial y}{\partial s} - \frac{\partial z}{\partial s})\cos(xy-z) = \{t^2(2s+t)+2st^2-1\}\cos(st^2(2s+t)-(s-2t)) = (4st^2+t^3-1)\cos(2s^2t^2+st^3-s+2t)$．同様に $\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t} = (y\frac{\partial x}{\partial t} + x\frac{\partial y}{\partial t} - \frac{\partial z}{\partial t})\cos(xy-z) = \{2st(2s+t)+st^2+2\}\cos(st^2(2s+t)-(s-2t)) = (4s^2t+3st^2+2)\cos(2s^2t^2+st^3-s+2t)$．

問題 3 (a) $\frac{\partial^{i+j}f}{\partial x^i\partial y^j} = (-1)^j\exp(x-y)$．
(b) f は $\mathbb{R}^2$ 上 C^∞ 級なので，任意の点 $(x,y) \neq (1,0)$ および任意の $N = 0,1,2,\ldots$ に対して，定理 T より 2 点 (x,y) および $(1,0)$ を端点とする線分上に点 $(\xi_N,\eta_N) \notin \{(x,y),(1,0)\}$ が存在して $f(x,y) = \sum_{k=0}^{N}\sum_{i+j=k}\frac{1}{i!j!}\frac{\partial^k f}{\partial x^i\partial y^j}(1,0)(x-1)^i y^j + R_N$．ただし $R_N = \sum_{i+j=N+1}\frac{1}{i!j!}\frac{\partial^{N+1}f}{\partial x^i\partial y^j}(\xi_N,\eta_N)(x-1)^i y^j$．ここで $|\frac{\partial^{N+1}f}{\partial x^i\partial y^j}(\xi_N,\eta_N)| = \exp(\xi_N-\eta_N)$ は $x-y\geq 1$ のとき $\exp(x-y)$ 以下で，$x-y<1$ のとき $\exp(1-0) = \mathrm{e}$ より小さい．従って $C = \max\{\exp(x-y),\mathrm{e}\}$ とおくと $C>0$ であり $|R_N| \leq C\sum_{i+j=N+1}\frac{|x-1|^i|y|^j}{i!j!} = \frac{C}{(N+1)!}\sum_{i=0}^{N+1}\binom{N+1}{i}|x-1|^i|y|^{N+1-i} = C\frac{(|x-1|+|y+1|)^{N+1}}{(N+1)!} \xrightarrow{N\to\infty} 0$．（途中で二項定理を用いた．）これより $\lim_{N\to\infty}R_N = 0$ なので $f(x,y) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{i+j=k}\frac{1}{i!j!}\frac{\partial^k f}{\partial x^i\partial y^j}(1,0)(x-1)^i y^j = \mathrm{e}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{i+j=k}\frac{(-1)^j}{i!j!}(x-1)^i y^j$．これが f の点 $(1,0)$ でのテイラー展開である．

問題 4 (a) $f_x = 2x+y$，$f_y = x+3y^2$ より $f_x = f_y = 0$ を満たす f の停留点は原点 $(0,0)$ および点 $(-\frac{1}{12},\frac{1}{6})$ のみ．
(b) $f_{xx} = 2$，$f_{xy} = 1$，$f_{yy} = 6y$ より f のヘッセ行列は $H_f = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 6y\end{pmatrix}$．
(c) 停留点 $(0,0)$：ヘッセ行列 $H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0\end{pmatrix}$ の固有値を λ_1,λ_2 とおくと $\lambda_1\lambda_2 = \det H_f(0,0) = -1 < 0$．これより λ_1,λ_2 の符号が異なるので停留点 $(0,0)$ は f の鞍点である．

停留点 $(-\frac{1}{12},\frac{1}{6})$：ヘッセ行列 $H_f(-\frac{1}{12},\frac{1}{6}) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1\end{pmatrix}$ の固有値を λ_1,λ_2 とおくと $\lambda_1\lambda_2 = \det H_f(-\frac{1}{12},\frac{1}{6}) = 1 > 0$ かつ $\lambda_1+\lambda_2 = \operatorname{tr} H_f(-\frac{1}{12},\frac{1}{6}) = 3 > 0$．これより λ_1,λ_2 はともに正なので停留点 $(-\frac{1}{12},\frac{1}{6})$ で f は真に極小になる．

問題 5 (a) $g(x,y) = x^2+y^2-1$ とおく．このとき $A = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ g(x,y) = 0\}$．また f,g は $\mathbb{R}^2$ 上 C^1 級で $f' = (f_x,f_y) = (1,2)$，$g' = (g_x,g_y) = (2x,2y)$．特に g' は（原点を除いて非零なので）原点を含まない A 上非零．従って f が点 $(a,b)\in A$ で A 上極大または極小になるとすると，定理 L より $\lambda\in\mathbb{R}$ が存在して $f'(a,b) = \lambda g'(a,b)$．このとき

$$a^2+b^2 = 1, \qquad 1 = 2a\lambda, \qquad 2 = 2b\lambda$$

であり，この方程式を満たすのは $a = \pm\frac{1}{\sqrt{5}}$，$b = \pm\frac{2}{\sqrt{5}}$，$\lambda = \pm\frac{\sqrt{5}}{2}$ のみ．（複号同順．）従って f は 2 点 $(a_+, b_+) = (\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}})$ および $(a_-, b_-) = (-\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}})$ 以外では A 上極大にも極小にもならない．

(b) g は $\mathbb{R}^2$ 上 C^1 級で $g(a_+, b_+) = 0$ かつ $g_y(a_+, b_+) = 2b_+ = \frac{4}{\sqrt{5}} \neq 0$．従って定理 I より，点 a_+ を含む開区間 I と点 b_+ を含む開区間 J および C^1 級関数 $\gamma : I \to J$ が存在して次が成り立つ：(i) $b_+ = \gamma(a_+)$．(ii) 任意の $x \in I$ および $y \in J$ に対して $g(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = \gamma(x)$．(iii) 任意の $x \in I$ に対して $g_y(x, \gamma(x)) = 2\gamma(x) \neq 0$ かつ $\gamma'(x) = -\frac{g_x(x,\gamma(x))}{g_y(x,\gamma(x))} = -\frac{x}{\gamma(x)}$．$I$ 上の C^1 級関数 $\varphi(x) = f(x, \gamma(x))$ に関して (iii) より $\varphi' = f_x + f_y\gamma' = 1 - \frac{2x}{\gamma}$．さらに (iii) より φ' は I 上 C^1 級であり $\varphi'' = -\frac{2}{\gamma} + \frac{2x\gamma'}{\gamma^2} = -\frac{2}{\gamma} - \frac{2x^2}{\gamma^3}$．今 $f'(a_+, b_+) = \lambda g'(a_+, b_+)$ を満たす λ が存在するので点 a_+ は φ の停留点．さらに (i) より $\varphi''(a_+) = -\frac{2}{b_+} - \frac{2a_+^2}{b_+^3} = -\frac{5\sqrt{5}}{4} < 0$．以上より φ は停留点 a_+ で真に極大になるので (ii) より f は点 (a_+, b_+) で A 上真に極大になる．

$g(a_-, b_-) = 0$ かつ $g_y(a_-, b_-) = 2b_- = -\frac{4}{\sqrt{5}} \neq 0$ より点 (a_-, b_-) に対しても定理 I による同様の議論は可能．ただし $\varphi''(a_-) = -\frac{2}{b_-} - \frac{2a_-^2}{b_-^3} = \frac{5\sqrt{5}}{4} > 0$ より φ は停留点 a_- で真に極小になるので f は点 (a_-, b_-) で A 上真に極小になる．