解析学 I-1：期末試験（2019-07-25）

問題 1　次の積分を求めよ．

(a) $\displaystyle\int_0^1 (1+x+x^2+x^3)\,\mathrm{d}x$　　(b) $\displaystyle\int_0^b x\mathrm{e}^{\alpha x^2}\,\mathrm{d}x$　　(c) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi^2}{9}} \cos\sqrt{x}\,\mathrm{d}x$

(d) $\displaystyle\int_{-a}^a \sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x \qquad (a \geq 0)$　　(e) $\displaystyle\int_0^\pi \mathrm{e}^{2x}\sin x\,\mathrm{d}x$

問題 2　次の広義積分を求めよ．

(a) $\displaystyle\int_0^\infty \mathrm{e}^{\alpha x}\,\mathrm{d}x$　　(b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$

問題 3　$\mathbb{R}^2$ において 2 本の曲線 $C_1 : y = \sin x$ および $C_2 : y = \sin 2x$ を考える．$\mathbb{R}^2$ の右半平面 $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x \geq 0\}$ における C_1 と C_2 の交点を x 座標の小さい順に $P_0, P_1, P_2, \ldots$ とおく．

(a) P_n の x 座標を求めよ．

(b) $n = 0, 1, 2, \ldots$ に対して C_1 と C_2 が P_n から P_{n+1} の間で囲む有界領域の面積 S_n を求めよ．

解答例（解析学 I-1：期末試験）

問題 1　(a) $\int_0^1 (1+x+x^2+x^3)\,\mathrm{d}x = [x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}]_0^1 = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4} = \frac{25}{12}$.
(b) $\alpha = 0$ のとき $\int_0^b x\,\mathrm{d}x = [\frac{x^2}{2}]_0^b = \frac{b^2}{2}$．$\alpha \neq 0$ のとき $\int_0^b x\mathrm{e}^{\alpha x^2}\,\mathrm{d}x = [\frac{\mathrm{e}^{\alpha x^2}}{2\alpha}]_0^b = \frac{\mathrm{e}^{\alpha b^2}-1}{2\alpha}$.
(c) $x = t^2$ とおくと $\int_0^{\frac{\pi^2}{9}} \cos\sqrt{x}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos\sqrt{x}\,\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{3}} 2t\cos t\,\mathrm{d}t =: I$．さらに部分積分により $I = [2t\sin t]_0^{\frac{\pi}{3}} - \int_0^{\frac{\pi}{3}} 2\sin t\,\mathrm{d}t = [2t\sin t + 2\cos t]_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\pi}{\sqrt{3}} - 1$.
(d) $x = a\sin t$ とおくと $\int_{-a}^{a} \sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2-x^2}\,\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} a^2\cos^2 t\,\mathrm{d}t = a^2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2t}{2}\,\mathrm{d}t = a^2[\frac{t}{2}+\sin 2t]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{a^2\pi}{2}$.
(e) 部分積分により $I := \int_0^{\pi} \mathrm{e}^{2x}\sin x\,\mathrm{d}x = [-\mathrm{e}^{2x}\cos x]_0^{\pi} + 2\int_0^{\pi} \mathrm{e}^{2x}\cos x\,\mathrm{d}x = [\mathrm{e}^{2x}(2\sin x - \cos x)]_0^{\pi} - 4\int_0^{\pi} \mathrm{e}^{2x}\sin x\,\mathrm{d}x = 1 + \mathrm{e}^{2\pi} - 4I$．これより $I = \frac{1+\mathrm{e}^{2\pi}}{5}$.

問題 2　(a) 任意の $b \geq 0$ に対して $\alpha = 0$ のとき $\int_0^b \mathrm{d}x = b \xrightarrow{b\to\infty} \infty$．$\alpha > 0$ のとき $\int_0^b \mathrm{e}^{\alpha x}\,\mathrm{d}x = [\frac{\mathrm{e}^{\alpha x}}{\alpha}]_0^b = \frac{\mathrm{e}^{\alpha b}-1}{\alpha} \xrightarrow{b\to\infty} \infty$．$\alpha < 0$ のとき同様にして $\int_0^b \mathrm{e}^{\alpha x}\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^{\alpha b}-1}{\alpha} \xrightarrow{b\to\infty} -\frac{1}{\alpha}$．以上より広義積分 $\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{\alpha x}\,\mathrm{d}x$ は $\alpha \geq 0$ のとき ∞ に発散し $\alpha < 0$ のとき $-\frac{1}{\alpha}$ に収束する．
(b) $x = \sin t$ とおくと $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$.

問題 3　(a) 右半平面における C_1 と C_2 の交点の x 座標は方程式 $\sin x = \sin 2x$ の非負解であり，この方程式は $\sin x = 2\sin x\cos x$ すなわち $\sin x = 0$ または $\cos x = \frac{1}{2}$ と同値．従って交点の x 座標は $x = n\pi$ および $x = (2n+\frac{1}{3})\pi$ および $x = (2n+\frac{5}{3})\pi$（$n = 0,1,2,\ldots$）．ゆえに P_n の x 座標は n が偶数ならば $n = 2k$ とおくとき $k\pi$，$n \bmod 4 = 1$ ならば $n = 4\ell+1$ とおくとき $(2\ell+\frac{1}{3})\pi$，$n \bmod 4 = 3$ ならば $n = 4\ell+3$ とおくとき $(2\ell+\frac{5}{3})\pi$.
(b) $0 \leq x \leq \frac{\pi}{3}$ のとき $\sin x \leq \sin 2x$ なので $S_0 = \int_0^{\frac{\pi}{3}} (\sin 2x - \sin x)\,\mathrm{d}x = [-\frac{\cos 2x}{2} + \cos x]_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{4}$．$\frac{\pi}{3} \leq x \leq \pi$ のとき $\sin x \geq \sin 2x$ なので $S_1 = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} (\sin x - \sin 2x)\,\mathrm{d}x = [-\cos x + \frac{\cos 2x}{2}]_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} = \frac{9}{4}$．$C_1, C_2$ は x 軸上の点 $(\pi, 0)$ に関して対称なので $S_2 = S_1$，$S_3 = S_0$．さらに C_1, C_2 は x 軸方向に周期 2π を持つので $S_{n+4} = S_n$（$n = 0,1,2,\ldots$）．以上より S_n は $n \bmod 4 = 0, 3$ のとき $\frac{1}{4}$ で $n \bmod 4 = 1, 2$ のとき $\frac{9}{4}$ である．