解析学 I-1：中間試験（2019-06-27）

問題 1　次の級数の和を求めよ．

(a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} q^k \quad (q > -1)$　　(b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k+1}$　　(c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{r^k}{k!}$

問題 2　次の関数 f の導関数を求めよ．

(a) $f(x) = \cos x^2 + \sin^2 x$　　(b) $f(x) = x^x \quad (x > 0)$　　(c) $\displaystyle f(x) = \prod_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{a_k x^k}$

問題 3　次の関数の極限を求めよ．

(a) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x^\alpha$　　(b) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} a^x \quad (a > 0)$　　(c) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} (x - \log x)$

問題 4　次の問いに答えよ．

(a) Lagrange の平均値の定理を述べよ．

(b) 関数 f は $[a,b]$ 上連続かつ (a,b) 上微分可能とする．また導関数 f' は (a,b) 上正とする．このとき f は $[a,b]$ 上狭義単調増加であることを Lagrange の平均値の定理を用いて示せ．

問題 5　関数 $f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 1$ に関して次の問いに答えよ．

(a) f の極値点と極値を求めよ．極大・極小についても議論すること．

(b) f の変曲点と変曲点での値を求めよ．どこで下に凸・上に凸になるかも議論すること．

(c) f のグラフの概形を描け．関数値がどこで増加・減少するか，および無限遠での挙動も議論すること．

問題 6　余弦関数 $f(x) = \cos x$ は $\mathbb{R}$ 上 $C^{(\infty)}$ 級である．

(a) f の第 k 階導関数を求めよ．

(b) テイラーの公式を用いて f のマクローリン展開を求めよ．剰余項の極限についても議論すること．

解答例（解析学 I-1：中間試験）

問題 1　(a) $-1 < q < 1$ のとき $\frac{1}{1-q}$，$q \geq 1$ のとき ∞.
(b) $\frac{k}{k+1} \xrightarrow{k\to\infty} 1 \neq 0$ よりこの級数は収束しない．収束しない正項級数は ∞ に発散するので求める和は ∞.
(c) 指数関数 $y = \mathrm{e}^x$ のテイラー展開 $\mathrm{e}^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ より求める和は e^r.

問題 2　(a) $f'(x) = -2x \sin x^2 + 2 \sin x \cos x$.
(b) $g(x) = \log f(x) = x \log x$ とおくとき $g'(x) = \log x + 1$．従って $f'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \mathrm{e}^{g(x)} = f(x)g'(x) = x^x(\log x + 1)$.
(c) $f(x) = \mathrm{e}^{\sum_{k=0}^{n} a_k x^k}$ より $f'(x) = f(x) \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) a_{k+1} x^k$.

問題 3　(a) $\alpha > 0$ のとき ∞，$\alpha = 0$ のとき 1，$\alpha < 0$ のとき 0.
(b) $0 < a < 1$ のとき 0，$a = 1$ のとき 1，$a > 1$ のとき ∞.
(c) 極限 $\lim_{x\to\infty} \frac{\log x}{x}$ を考える．分母と分子は $x \to \infty$ の極限でともに ∞ に発散する．そこで分母と分子を微分すると $\frac{1}{x} \xrightarrow{x\to\infty} 0$．従ってロピタルの法則より $\frac{\log x}{x} \xrightarrow{x\to\infty} 0$．ゆえに $x - \log x = x(1 - \frac{\log x}{x}) \xrightarrow{x\to\infty} \infty$.

問題 4　(a) 関数 f は $[a, b]$ 上連続かつ (a, b) 上微分可能とする．このとき $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$ を満たす $c \in (a, b)$ が存在する．
(b) 任意の $a \leq x < x' \leq b$ に対して Lagrange の平均値の定理より $f(x') - f(x) = f'(c)(x' - x)$ を満たす $c' \in (x, x')$ が存在する．仮定より $f'(c) > 0$ なのでこれより $f(x') - f(x) > 0$ すなわち $f(x) < f(x')$ である．

問題 5　(a) f は $\mathbb{R}$ 上微分可能なので f の極値点は停留点の中にある．$f'(x) = 3x^2 - 4x + 1 = (3x-1)(x-1)$ より f の停留点は $f'(x) = 0$ を満たす $x = \frac{1}{3}, 1$．$f''(x) = 6x - 4$ から $f''(\frac{1}{3}) = -2 < 0$ より f は停留点 $x = \frac{1}{3}$ で狭義の極大．（極大値 $f(\frac{1}{3}) = -\frac{23}{27}$.）また $f''(1) = 2 > 0$ より f は停留点 $x = 1$ で狭義の極小．（極小値 $f(1) = -1$.）
(b) $f''(x) = 6x - 4$ は $x < \frac{2}{3}$ で負なので f は $x \leq \frac{2}{3}$ で狭義の上に凸．また f'' は $x > \frac{2}{3}$ で正なので f は $x \geq \frac{2}{3}$ で狭義の下に凸．ゆえに f の変曲点は $x = \frac{2}{3}$.（$f(\frac{2}{3}) = -\frac{25}{27}$.）
(c) f' は $x < \frac{1}{3}$ および $x > 1$ で正なので f は $x \leq \frac{1}{3}$ および $x \geq 1$ で狭義単調増加．また f' は $\frac{1}{3} < x < 1$ のとき負なので f は $\frac{1}{3} \leq x \leq 1$ で狭義単調減少．$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$（複合同順）．$f$ のグラフの概形は略．

問題 6　(a) $f'(x) = \sin x = \cos(x + \frac{\pi}{2})$ より $f^{(k)}(x) = \cos(x + \frac{k\pi}{2})$.
(b) テイラーの公式より任意の点 $x \neq 0$ と $n = 0, 1, 2, \ldots$ に対して

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\cos(\frac{k\pi}{2})}{k!} x^k + R_n, \qquad R_n = \frac{\cos(\xi_n + \frac{(n+1)\pi}{2})}{(n+1)!} x^{n+1}$$

を満たす点 $\xi_n \neq 0, x$ が x と原点 0 の間に存在する．ここで剰余項 R_n に関して $|\cos| \leq 1$ より

$$|R_n| = \frac{|\cos(\xi_n + \frac{(n+1)\pi}{2})|}{(n+1)!} |x|^{n+1} \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

なので $\lim_{n\to\infty} R_n = 0$．ゆえに任意の x に対して $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos(\frac{k\pi}{2})}{k!} x^k$ が成り立つ．さらに

$$\cos\left(\frac{k\pi}{2}\right) = \begin{cases} 1 & (k \bmod 4 = 0), \\ -1 & (k \bmod 4 = 2), \\ 0 & (k\text{: odd}) \end{cases}$$

より任意の x に対して

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots .$$

これが $f(x) = \cos x$ のマクローリン展開である．