解析学 II-1：期末試験（2019-01-24）

問題 1　次の積分を求めよ．

(a) $\displaystyle\int_{0\le x,y\le 1}(x+y)\mathrm{e}^{x+y}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$　　(b) $\displaystyle\int_{0\le x,y\le \frac{\pi}{2}}\sin(x+2y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

問題 2　次の積分を求めよ．

(a) $\displaystyle\int_{\substack{x,y\ge 0\\ x+y\le 1}}(x+y)^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$　　(b) $\displaystyle\int_{\substack{0\le x\le 1\\ \sqrt{x}\le y\le 1}}\sqrt{1+y^3}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

問題 3　次の問いに答えよ．

(a) 次の積分を変数変換 $s=x+y,\ t=x-y$ を用いて求めよ．

$$\int_{\substack{0\le x+y\le a\\ 0\le x-y\le b}}(x^2-y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \qquad (a,b\ge 0)$$

(b) 次の積分を極座標に変換して求めよ．

$$\int_{\substack{x,y\ge 0\\ x^2+y^2\le a^2}} xy\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \qquad (a\ge 0)$$

問題 4　広義積分

$$\int_{0<x,y\le 1}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{x+y}$$

を求めよ．ただし広義積分は「有界閉集合上の有界関数の積分」の極限として計算すること．

問題 5　広義積分 $\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ を求めよ．ただし広義積分は「有界閉集合上の有界関数の積分」の極限として計算すること．

解答例（解析学 II-1：期末試験）

問題 1　(a) $\int_{0\le x,y\le 1}(x+y)\mathrm{e}^{x+y}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 2(\int_0^1 x\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x)(\int_0^1 \mathrm{e}^y\,\mathrm{d}y) = 2(\mathrm{e}-1)$.
(b) $\int_{0\le x,y\le\frac{\pi}{2}}\sin(x+2y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}x\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(x+2y)\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos x+\sin x)\,\mathrm{d}x = 1$.

問題 2　(a) $\int_{\substack{x,y\ge 0\\ x+y\le 1}}(x+y)^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}(x+y)^2\,\mathrm{d}y = \frac{1}{3}\int_0^1(1-x^3)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}$.
(b) $\int_{\substack{0\le x\le 1\\ \sqrt{x}\le y\le 1}}\sqrt{1+y^3}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{\substack{0\le y\le 1\\ 0\le x\le y^2}}\sqrt{1+y^3}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1\sqrt{1+y^3}\,\mathrm{d}y\int_0^{y^2}\mathrm{d}x = \int_0^1 y^2\sqrt{1+y^3}\,\mathrm{d}y = [\frac{2}{9}(1+y^3)^{\frac{3}{2}}]_{y=0}^{y=1} = \frac{4\sqrt{2}-2}{9}$.

問題 3　(a) $\frac{\partial(x,y)}{\partial(s,t)} = (\frac{\partial(s,t)}{\partial(x,y)})^{-1} = (\det\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix})^{-1} = -\frac{1}{2}$ より $\int_{\substack{0\le x+y\le a\\ 0\le x-y\le b}}(x^2-y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{\substack{0\le s\le a\\ 0\le t\le b}}(x+y)(x-y)\,|\frac{\partial(x,y)}{\partial(s,t)}|\,\mathrm{d}s\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_{\substack{0\le s\le a\\ 0\le t\le b}}st\,\mathrm{d}s\mathrm{d}t = \frac{1}{2}(\int_0^a s\,\mathrm{d}s)(\int_0^b t\,\mathrm{d}t) = \frac{a^2b^2}{8}$.
(b) $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta,$ とおいて極座標に変換すると $\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = r$ より $\int_{\substack{x,y\ge 0\\ x^2+y^2\le a^2}}xy\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{\substack{0\le r\le a\\ 0\le\theta\le\frac{\pi}{2}}}xy\,|\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}|\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta = \int_{\substack{0\le r\le a\\ 0\le\theta\le\frac{\pi}{2}}}r^3\cos\theta\sin\theta\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta = (\int_0^a r^3\,\mathrm{d}r)(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\sin\theta\,\mathrm{d}\theta) = \frac{a^4}{8}$.

問題 4　積分領域の近似列 $\{K_\ell\}$ として $K_\ell = [\ell^{-1},1]^2$ をとると $J_\ell = \int_{K_\ell}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{x+y} = \int_{\ell^{-1}\le x,y\le 1}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{x+y} = \int_{\ell^{-1}}^1\mathrm{d}x\int_{\ell^{-1}}^1\frac{\mathrm{d}y}{x+y} = \int_{\ell^{-1}}^1\{\log(x+1)-\log(x+\ell^{-1})\}\,\mathrm{d}x = [(x+1)\log(x+1)-(x+\ell^{-1})\log(x+\ell^{-1})]_{x=\ell^{-1}}^{x=1} = 2\log 2 - 2(1+\ell^{-1})\log(1+\ell^{-1}) + 2\ell^{-1}\log(2\ell^{-1})$ 従って $\int_{0<x,y\le 1}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{x+y} = \lim_{\ell\to\infty}J_\ell = 2\log 2$.

問題 5　広義積分 $I = \int_{\mathbb{R}^2}\mathrm{e}^{-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ を考える．積分領域 $\mathbb{R}^2$ の近似列 $\{K_\ell\}$ として $K_\ell = [-\ell,\ell]^2$ をとると $J_\ell = \int_{K_\ell}\mathrm{e}^{-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{-\ell\le x,y\le\ell}\mathrm{e}^{-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = (\int_{-\ell}^\ell\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x)(\int_{-\ell}^\ell\mathrm{e}^{-y^2}\,\mathrm{d}y) = (\int_{-\ell}^\ell\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x)^2$. また $\mathbb{R}^2$ の近似列 $\{K'_\ell\}$ として $K'_\ell = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ x^2+y^2\le\ell^2\}$ をとると $J'_\ell = \int_{K'_\ell}\mathrm{e}^{-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{x^2+y^2\le\ell^2}\mathrm{e}^{-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$. ここで $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ とおいて極座標に変換すると $J'_\ell = \int_{\substack{0\le r\le\ell\\ 0\le\theta\le 2\pi}}r\mathrm{e}^{-r^2}\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta = (\int_0^\ell r\mathrm{e}^{-r^2}\,\mathrm{d}r)(\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta) = \pi(1-\mathrm{e}^{-\ell^2})$. 従って $(\int_{-\infty}^\infty\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x)^2 = \lim_{\ell\to\infty}J_\ell = I = \lim_{\ell\to\infty}J'_\ell = \pi$ かつ $\int_{-\infty}^\infty\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x\ge 0$ より $\int_{-\infty}^\infty\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}$.