解析学 II-1：中間試験（2018-11-22）

問題 1　次の問いに答えよ．

(a) 関数 $z=\log(x^2-y^2)$ の変数 x,y が，変数 t の関数として $x=\cos t,\ y=\sin t$ により与えられているとする．連鎖律を用いて微分 $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$ を t の関数として求めよ．

(b) 関数 $w=\frac{xy}{z}$ の変数 x,y,z が，変数 s,t の関数として $x=st,\ y=s+t,\ z=s-t$ により与えられているとする．連鎖律を用いて偏微分 $\frac{\partial w}{\partial s}$，$\frac{\partial w}{\partial t}$ を s,t の関数として求めよ．

問題 2　次の関数 f の 1,2,3 階偏導関数をすべて求めよ．

(a)　$f(x,y)=\sin(xy)$　　　(b)　$f(x,y,z)=(ax+by)(cy+dz)$

問題 3　関数 $f(x,y)=\exp(1-xy)$ を考える．次の (a,b) に対して，f の点 (a,b) でのテイラー展開を 3 次まで

$$
\begin{aligned}
f(x,y)=\boxed{}+\boxed{}(x-a)+\boxed{}(y-b)+\boxed{}(x-a)^2+\boxed{}(x-a)(y-b)+\boxed{}(y-b)^2\\
+\boxed{}(x-a)^3+\boxed{}(x-a)^2(y-b)+\boxed{}(x-a)(y-b)^2+\boxed{}(y-b)^3+\cdots
\end{aligned}
$$

の形で求めよ．

(a)　$(a,b)=(1,1)$　　　(b)　$(a,b)=\left(2,\dfrac{1}{2}\right)$

問題 4　関数 $f(x,y)=x^2-2xy+y^3$ を考える．

(a) f の停留点をすべて求めよ．

(b) f のヘッセ行列を求めよ．

(c) 各停留点において f が極大，極小になるかどうか調べよ．

問題 5　ラグランジュの未定乗数法を用いて，制約条件 $x^2+y^2=1$ の下での関数 $f(x,y)=xy$ の極値点の候補を求めよ．

解答例（解析学 II-1：中間試験）

問題 1　(a) $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x}{x^2-y^2}$，$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{2y}{x^2-y^2}$ および $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -\sin t$，$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \cos t$ より

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \frac{2}{x^2-y^2}\left(x\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} - y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right) = -\frac{4\cos t\sin t}{\cos^2 t - \sin^2 t} = -\frac{2\sin 2t}{\cos 2t} = -2\tan 2t.$$

(b) $\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{y}{z}$，$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{x}{z}$，$\frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{xy}{z^2}$ および $\frac{\partial x}{\partial s} = t$，$\frac{\partial y}{\partial s} = 1$，$\frac{\partial z}{\partial s} = 1$ より

$$\frac{\partial w}{\partial s} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{y}{z}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{x}{z}\frac{\partial y}{\partial s} - \frac{xy}{z^2}\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{t(s+t)}{s-t} + \frac{st}{s-t} - \frac{st(s+t)}{(s-t)^2} = \frac{t(s^2-2st-t^2)}{(s-t)^2}.$$

同様に $\frac{\partial x}{\partial t} = s$，$\frac{\partial y}{\partial t} = 1$，$\frac{\partial z}{\partial t} = -1$ より

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{y}{z}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{x}{z}\frac{\partial y}{\partial t} - \frac{xy}{z^2}\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{s(s+t)}{s-t} + \frac{st}{s-t} + \frac{st(s+t)}{(s-t)^2} = \frac{s(s^2+2st-t^2)}{(s-t)^2}.$$

問題 2　(a) 1 階偏導関数は $f_x = y\cos(xy)$，$f_y = x\cos(xy)$．2 階偏導関数は $f_{x^2} = -y^2\sin(xy)$，$f_{y^2} = -x^2\sin(xy)$，$f_{xy} = \cos(xy) - xy\sin(xy)$．3 階偏導関数は $f_{x^3} = -y^3\cos(xy)$，$f_{y^3} = -x^3\cos(xy)$，$f_{x^2y} = -2y\sin(xy) - xy^2\cos(xy)$，$f_{xy^2} = -2x\sin(xy) - x^2y\cos(xy)$．
(b) 1 階偏導関数は $f_x = a(cy+dz)$，$f_y = b(cy+dz) + c(ax+by)$，$f_z = d(ax+by)$．2 階偏導関数は $f_{x^2} = f_{z^2} = 0$，$f_{y^2} = 2bc$，$f_{xy} = ac$，$f_{xz} = ad$，$f_{yz} = bd$．3 階偏導関数はすべて 0.

問題 3　f の 1 階偏導関数は $f_x = -yf$，$f_y = -xf$，2 階偏導関数は $f_{x^2} = y^2 f$，$f_{xy} = -(1-xy)f$，$f_{y^2} = x^2 f$，3 階偏導関数は $f_{x^3} = -y^3 f$，$f_{x^2y} = y(2-xy)f$，$f_{xy^2} = x(2-xy)f$，$f_{y^3} = -x^3 f$ より，f の点 (a,b) でのテイラー展開

$$\begin{aligned} f(x,y) &= f(a,b) + f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b) \\ &\quad + \frac{f_{x^2}(a,b)}{2}(x-a)^2 + f_{xy}(a,b)(x-a)(y-b) + \frac{f_{y^2}(a,b)}{2}(y-b)^2 \\ &\quad + \frac{f_{x^3}(a,b)}{6}(x-a)^3 + \frac{f_{x^2y}(a,b)}{2}(x-a)^2(y-b) + \frac{f_{xy^2}(a,b)}{2}(x-a)(y-b)^2 + \frac{f_{y^3}(a,b)}{2}(y-b)^3 + \cdots \end{aligned}$$

は (a) $(a,b) = (1,1)$ のとき

$$\begin{aligned} f(x,y) = 1 - (x-1) - (y-1) + \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(y-1)^2}{2} \\ - \frac{(x-1)^3}{6} + \frac{(x-1)^2(y-1)}{2} + \frac{(x-1)(y-1)^2}{2} - \frac{(y-1)^3}{6} + \cdots. \end{aligned}$$

(b) $(a,b) = (2,\frac{1}{2})$ のとき

$$\begin{aligned} f(x,y) = 1 - \frac{(x-2)}{2} - 2(y-\tfrac{1}{2}) + \frac{(x-2)^2}{8} + 2(y-\tfrac{1}{2})^2 \\ - \frac{(x-2)^3}{48} + \frac{(x-2)^2(y-\frac{1}{2})}{4} + (x-2)(y-\tfrac{1}{2})^2 - \frac{4(y-\frac{1}{2})^3}{3} + \cdots. \end{aligned}$$

問題 4　関数 $f(x,y)=x^2-2xy+y^3$ を考える．

(a) $f_x=2x-2y$，$f_y=-2x+3y^2$ より $f_x=f_y=0$ を満たす f の停留点は $(x,y)=(0,0)$ および $(\frac{2}{3},\frac{2}{3})$ の 2 点．

(b) $f_{x^2}=2$，$f_{y^2}=6y$，$f_{xy}=-2$ より f のヘッセ行列は

$$H_f=\begin{pmatrix}2 & -2\\ -2 & 6y\end{pmatrix}.$$

(c) 停留点 $(0,0)$ におけるヘッセ行列

$$H_f(0,0)=\begin{pmatrix}2 & -2\\ -2 & 0\end{pmatrix}$$

は $\det H_f(0,0)=-4<0$ より正負両方の固有値を持つ．従って $(0,0)$ は f の鞍点である．また停点留 $(\frac{2}{3},\frac{2}{3})$ におけるヘッセ行列

$$H_f(\tfrac{2}{3},\tfrac{2}{3})=\begin{pmatrix}2 & -2\\ -2 & 4\end{pmatrix}$$

は $\det H_f(\frac{2}{3},\frac{2}{3})=4>0$ かつ $\operatorname{tr} H_f(\frac{2}{3},\frac{2}{3})=6>0$ より 2 つの正の固有値を持つ．従って $(\frac{2}{3},\frac{2}{3})$ は f の真の極小点である．（別解：$H_f(\frac{2}{3},\frac{2}{3})$ の首座小行列式は次数の小さい順に $2>0$，$4>0$ なので $H_f(\frac{2}{3},\frac{2}{3})$ は正の固有値のみを持つ．従って $(\frac{2}{3},\frac{2}{3})$ は f の真の極小点である．）

問題 5　$g(x,y)=x^2+y^2-1$ とおく．$f_x=y$，$f_y=x$ および $g_x=2x$，$g_y=2y$ より，制約条件 $x^2+y^2=1$ すなわち $g=0$ の下での f の極値点は連立方程式 $f_x=\lambda g_x$，$f_y=\lambda g_y$，$g=0$ すなわち

$$y=2\lambda x,\qquad x=2\lambda y,\qquad x^2+y^2=1$$

の解の中にある．第 1 式と第 2 式より $\frac{y}{x}=2\lambda=\frac{x}{y}$．特に $x^2=y^2$．これと第 3 式より $x^2=y^2=\frac{1}{2}$ すなわち $(x,y)=(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}),(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}),(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}),(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}})$．この 4 点が極値点の候補である．