解析学 I-1：期末試験（2018-07-26）

問題 1　$x > -1$ のとき幾何級数 $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$ の和を求めよ．ただし $0^0 := 1$ とする．

問題 2　次の積分を求めよ．

(a) $\displaystyle\int_0^1 (1 - x + x^2 - x^3)\,\mathrm{d}x$　　(b) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}} \tan x\,\mathrm{d}x$　　(c) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$

(d) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{ax}\cos x\,\mathrm{d}x \qquad (a \neq 0)$

問題 3　次の広義積分を求めよ．

(a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x}}$　　(b) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$　　(c) $\displaystyle\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-\alpha x}\,\mathrm{d}x \qquad (\alpha > 0)$

問題 4　$a > 0$ とする．2 つの円盤 $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2+y^2 \le a^2\}$ および $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2+(y-a)^2 \le a^2\}$ の共通部分 $A \cap B$ の面積を求めよ．

解答例（解析学 I-1：期末試験）

問題 1　幾何級数の第 n 項までの和を s_n とおく：$s_n = \sum_{k=0}^{n-1} x^k$．このとき

$$s_n = \begin{cases} \frac{1-x^n}{1-x} & (x \neq 1), \\ n & (x = 1). \end{cases}$$

数列 $\{s_n\}$ は $-1 < x < 1$ のとき $\frac{1}{1-x}$ に収束し $x \geq 1$ のとき ∞ に発散する．ゆえに $x > -1$ のとき

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \lim_{n\to\infty} s_n = \begin{cases} \frac{1}{1-x} & (-1 < x < 1), \\ \infty & (x \geq 1). \end{cases}$$

問題 2　(a) $\int_0^1 (1 - x + x^2 - x^3)\,\mathrm{d}x = [x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}]_0^1 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{7}{12}$.
(b) $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \tan x\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sin x}{\cos x}\,\mathrm{d}x = [-\log(\cos x)]_0^{\frac{\pi}{6}} = -\log\frac{\sqrt{3}}{2} + \log 1 = \log 2 - \frac{\log 3}{2}$.
(c) $x = \tan t$ とおくとき $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+x^2}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+\tan^2 t}\cdot\frac{1}{\cos^2 t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\mathrm{d}t}{\cos^2 t+\sin^2 t} = \int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}t = \frac{\pi}{4}$.
(d) 部分積分を用いて $\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{ax}\cos x\,\mathrm{d}x = [\mathrm{e}^{ax}\sin x]_{-\pi}^{\pi} - a\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{e}^{ax}\sin x\,\mathrm{d}x = 0 + a[\mathrm{e}^{ax}\cos x]_{-\pi}^{\pi} - a^2\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{e}^{ax}\cos x\,\mathrm{d}x = a(\mathrm{e}^{-a\pi} - \mathrm{e}^{a\pi}) - a^2\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{e}^{ax}\cos x\,\mathrm{d}x$．ゆえに $\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{e}^{ax}\cos x\,\mathrm{d}x = \frac{a(\mathrm{e}^{-a\pi}-\mathrm{e}^{a\pi})}{a^2+1}$.

問題 3　(a) 任意の $a < 1$ に対して $I(a) := \int_0^a \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x}} = [-2\sqrt{1-x}]_0^a = 2(1-\sqrt{1-a})$．ゆえに $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x}} = \lim_{a\to 1-0} I(a) = 2$.
(b) 任意の $-1 < a < 1$ に対して積分 $I(a) := \int_0^a \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$ を求める．$x = \sin t$ とおくとき $I(a) = \int_0^{\alpha} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\alpha}\frac{\cos t}{\sqrt{1-\sin^2 t}}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\alpha}\frac{\cos t}{\sqrt{\cos^2 t}}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\alpha}\frac{\cos t}{\cos t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\alpha}\mathrm{d}t = \alpha$．ただし $\alpha = \mathrm{Arcsin}\,a$ であり Arcsin は定義域を $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ に制限したときの sin の逆関数である．ゆえに $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{a\to 1-0} I(a) = \lim_{a\to 1-0}\mathrm{Arcsin}\,a = \frac{\pi}{2}$．被積分関数は偶関数なので $\int_{-1}^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = 2\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \pi$.
(c) 任意の r に対して $I(r) := \int_0^r \mathrm{e}^{-\alpha x}\,\mathrm{d}x = [-\frac{\mathrm{e}^{-\alpha x}}{\alpha}]_0^r = \frac{1-\mathrm{e}^{-\alpha r}}{\alpha}$．ゆえに $\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-\alpha x}\,\mathrm{d}x = \lim_{r\to\infty} I(r) = \frac{1}{\alpha}$.

問題 4

$$A\cap B = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ -\frac{\sqrt{3}}{2}a \leq x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}a,\ a - \sqrt{a^2-x^2} \leq y \leq \sqrt{a^2-x^2}\right\}$$

より $A\cap B$ の面積は積分 $I := \int_{-\frac{\sqrt{3}}{2}a}^{\frac{\sqrt{3}}{2}a}\sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x$ と $J := \int_{-\frac{\sqrt{3}}{2}a}^{\frac{\sqrt{3}}{2}a}(a - \sqrt{a^2-x^2})\,\mathrm{d}x$ の差 $I - J$ に等しい．積分 I は $x = a\sin t$ とおくとき $I = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}\sqrt{a^2-x^2}\,\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t = a^2\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}\cos^2 t\,\mathrm{d}t = \frac{a^2}{2}\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}(\cos 2t + 1)\,\mathrm{d}t = a^2\left(\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\pi}{3}\right)$．積分 J は $J = \int_{-\frac{\sqrt{3}}{2}a}^{\frac{\sqrt{3}}{2}a} a\,\mathrm{d}x - I = a^2\sqrt{3} - I = a^2\left(\frac{3\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi}{3}\right)$．ゆえに $A\cap B$ の面積は $I - J = a^2(\frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2})$.