解析学 I-1：中間試験（2018-06-28）

問題 1　次の級数の和を求めよ．

(a)　$\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} p^k \quad (p > -1)$　　(b)　$\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k+1}$　　(c)　$\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{p^k}{k!}$

問題 2　次の関数 f の導関数を求めよ．

(a)　$f(x) = \cos x^2 + \cos^2 x$　　(b)　$f(x) = x^x$　　(c)　$\displaystyle f(x) = \prod_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{c_k x^k}$

問題 3　次の関数の極限を求めよ．

(a)　$\displaystyle\lim_{x\to\infty} a^x \quad (a > 0)$　　(b)　$\displaystyle\lim_{x\to\infty} (\sqrt{x} - \log x)$　　(c)　$\displaystyle\lim_{x\to 0-0} \frac{\sin x}{x^2}$

問題 4　次の問いに答えよ．

(a)（Lagrange の）平均値の定理を述べよ．

(b) 関数 f は $[a,b]$ 上連続 (a,b) 上微分可能とする．また導関数 f' は (a,b) 上正とする．このとき f は $[a,b]$ 上狭義単調増加であることを示せ．ただし平均値の定理を証明なしで用いてよい．

問題 5　関数 $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 4$ に関して次の問いに答えよ．

(a) f の極値点を求めよ．極大，極小についても調べること．

(b) f の変曲点を求めよ．どこで上に凸，下に凸になるか議論すること．

(c) f のグラフの概形を描け．極値点と極値，関数値の増減，上に凸および下に凸，変曲点，無限遠での挙動を議論すること．

問題 6　関数 $f(x) = \sqrt{x}$ を考える．次の問いに答えよ．

(a) f の第 n 階導関数を求めよ．

(b) 非負整数 n に対して，テイラーの公式を用いて f を

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k (x-1)^k + (\text{剰余項}) \qquad (c_k\text{：定数})$$

の形に書け．剰余項も具体的に書き下すこと．

(c) 剰余項の極限を調べることにより f の 1 でのテイラー展開を求めよ．

解答例（解析学 I-1：中間試験）

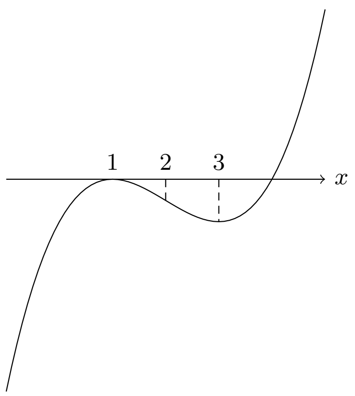
問題 1　(a) $\sum_{k=0}^{n} p^k = \frac{1-p^{n+1}}{1-q}$ より級数の和は $|p| < 1$ のとき $\frac{1}{1-p}$，$p \geq 1$ のとき ∞．(b) $k \geq 1$ のとき $\frac{k}{k+1} = 1 - \frac{1}{k+1} \geq \frac{1}{2}$ なので $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k+1} \geq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2} = \infty$．これより求める級数の和は ∞．(c) テイラー展開 $\mathrm{e}^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ より級数の和は e^p．

問題 2　(a) $f'(x) = -2x \sin x^2 - 2\cos x \sin x$．(b) $g(x) = \log f(x) = x \log x$ とおくとき $g'(x) = \log x + 1$．これより $f'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \mathrm{e}^{g(x)} = f(x)g'(x) = x^x(\log x + 1)$．(c) $f(x) = \mathrm{e}^{\sum_{k=0}^{n} c_k x^k}$ より $f'(x) = f(x) \sum_{k=1}^{n} k c_k x^{k-1}$．

問題 3　(a) $0 < a < 1$ のとき 0, $a = 1$ のとき 1, $a > 1$ のとき ∞．(b) 極限 $\lim_{x\to\infty} \frac{\log x}{\sqrt{x}}$ は $\frac{\infty}{\infty}$ の不定形なので分母と分子をそれぞれ微分すると $2x^{-\frac{5}{2}} \xrightarrow{x\to\infty} 0$．従ってロピタルの法則より $\lim_{x\to\infty} \frac{\log x}{\sqrt{x}} = 0$．また $\lim_{x\to\infty} \sqrt{x} = \infty$．これより $\sqrt{x} - \log x = \sqrt{x}(1 - \frac{\log x}{\sqrt{x}}) \xrightarrow{x\to\infty} \infty$．(c) $\lim_{x\to 0-0} \frac{\sin x}{x} = 1$ および $\lim_{x\to 0-0} \frac{1}{x} = -\infty$ より $\frac{\sin x}{x^2} = \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{x} \xrightarrow{x\to 0-0} -\infty$．

問題 4　(a) 関数 f は $[a,b]$ 上連続 (a,b) 上微分可能とする．（ただし $a < b$.）このとき $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$ を満たす $c \in (a,b)$ が存在する．(b) 任意の $x, x' \in [a,b]$（$x < x'$）に対して，平均値の定理より $c \in [x, x']$ が存在して $\frac{f(x')-f(x)}{x'-x} = f'(c)$ が成り立つ．ここで $c \in [x,x'] \subset [a,b]$ なので仮定より $f'(c) > 0$ であり，これより $f(x') - f(x) > 0$ が成り立つ．

問題 5　(a) f は $\mathbb{R}$ 上微分可能なので f の極値点は停留点の中にある．$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = (x-3)(3x-3)$ より $f(x)$ の停留点は $f'(x) = 0$ を満たす $x = 1, 3$．さらに $f''(x) = 6x - 12$ から $f''(1) = -6 < 0$ より停留点 $x = 1$ は $f(x)$ の極大点．同様に $f''(3) = 6 > 0$ より停留点 $x = 3$ は $f(x)$ の極小点．(b) $f''(x) = 6x - 12$ は $x < 2$ のとき負なので $f(x)$ は $x \leq 2$ で上に凸．また $f''(x)$ は $x > 2$ のとき正なので $f(x)$ は $x \geq 2$ で下に凸．ゆえに上に凸と下に凸の入れ替わる $x = 2$ が $f(x)$ の変曲点．(c) $f'(x)$ は $x < 1$ および $x > 3$ のとき正なので $f(x)$ は $x \leq 1$ および $x \geq 3$ でそれぞれ狭義単調増加．また $f'(x)$ は $1 < x < 3$ のとき負なので $f(x)$ は $1 \leq x \leq 3$ で狭義単調減少．さらに $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$（複合同順）．以上より f のグラフの概形は次のようになる．



問題 6　(a) $f^{(n)}(x) = x^{-n+\frac{1}{2}} \prod_{j=1}^{n} (\frac{3}{2} - j)$．(b) $\frac{f^{(n)}(1)}{n!} = \frac{1}{n!} \prod_{j=1}^{n} (\frac{3}{2} - j) = \prod_{j=1}^{n} \frac{3-2j}{2j}$ に注意する．$x \neq 1$

のときテイラーの公式より x と 1 の間に ξ が存在して

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(1)}{k!}(x-1)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-1)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n}(x-1)^k \prod_{j=1}^{k} \frac{3-2j}{2j} + \frac{(x-1)^{n+1}}{\xi^{n+\frac{1}{2}}} \prod_{j=1}^{n+1} \frac{3-2j}{2j}.$$

(c) 剰余項 $R_{n+1} = \frac{(x-1)^{n+1}}{\xi^{n+\frac{1}{2}}} \prod_{j=1}^{n+1} \frac{3-2j}{2j}$ に関して

$$|R_{n+1}| = \frac{|\xi|^{\frac{1}{2}}}{2n+2} \left|\frac{x-1}{\xi}\right|^{n+1} \prod_{j=1}^{n} \frac{2j-1}{2j} < \frac{|\xi|^{\frac{1}{2}}}{2n+2} \left|\frac{x-1}{\xi}\right|^{n+1}.$$

ここで $|\frac{x-1}{\xi}| \leq 1$ ならば最後の不等式の右辺は $n \to \infty$ のとき 0 に収束し，従って R_{n+1} も 0 に収束する．ξ が x と 1 の間にあることに注意すると，そのための十分条件として $\frac{1}{2} \leq x \leq 2$ がとれる．ゆえに

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty}(x-1)^k \prod_{j=1}^{k} \frac{3-2j}{2j} \qquad \left(\frac{1}{2} \leq x \leq 2\right).$$

これが $f(x) = \sqrt{x}$ の $x = 1$ でのテイラー展開である．（実はこの等式は $0 < x \leq 2$ のとき成り立つ．）