# 解析学 II-1: 中間試験 (2017-11-16)

問題 1　次の問いに答えよ.
(a) 関数 $z = \tan(x^2 + y^2)$ の変数 $x, y$ が, 変数 $t$ の関数として $x = 3t^2$, $y = 2t^3$ により与えられているとする. 連鎖律を用いて微分 $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$ を ($t$ の関数として) 求めよ.
(b) 関数 $w = \frac{xy}{z}$ の変数 $x, y, z$ が, 変数 $s, t$ の関数として $x = s + t$, $y = st$, $z = s - t$ により与えられているとする. 連鎖律を用いて偏微分 $\frac{\partial w}{\partial s}$, $\frac{\partial w}{\partial t}$ を ($s, t$ の関数として) 求めよ.

問題 2　次の関数 $f$ の 1,2,3 階偏導関数をすべて求めよ.

(a)　$f(x, y) = \sin(x - y)$　　　(b)　$f(x, y, z) = (ax + by)(cy + dz)$

問題 3　関数 $f(x, y) = \exp(x - y^2)$ を考える. 次の $(a, b)$ に対して, $f$ の点 $(a, b)$ まわりでのテイラー展開を 3 次まで求めよ.

(a)　$(a, b) = (0, 0)$　　　(b)　$(a, b) = (1, 1)$

問題 4　関数 $f(x, y) = x^2 - xy + y^3$ を考える.
(a) $f$ の停留点をすべて求めよ.
(b) $f$ のヘッセ行列を求めよ.
(c) 各停留点において $f$ が極大, 極小になるかどうか調べよ.

問題 5　ラグランジュの未定乗数法を用いて, 制約条件 $x^2 + y^2 = 1$ の下での関数 $f(x, y) = ax + by$ $(ab \neq 0)$ の最大点と最小点を求めよ. ただし最大点と最小点の存在は示さなくてもよい.

解答例 (解析学 II-1: 中間試験)

問題 1　(a) $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x}{\cos^2(x^2+y^2)}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2y}{\cos^2(x^2+y^2)}$ および $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 6t$, $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 6t^2$ より

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{\cos^2(x^2+y^2)}\left(2x\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + 2y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right) = \frac{6t^2 \cdot 6t + 4t^3 \cdot 6t^2}{\cos^2(9t^4+4t^6)} = \frac{36t^3 + 24t^5}{\cos^2(9t^4+4t^6)}.$$

(b) $\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{y}{z}$, $\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{x}{z}$, $\frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{xy}{z^2}$ および $\frac{\partial x}{\partial s} = 1$, $\frac{\partial y}{\partial s} = t$, $\frac{\partial z}{\partial s} = 1$ より

$$\frac{\partial w}{\partial s} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{y}{z}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{x}{z}\frac{\partial y}{\partial s} - \frac{xy}{z^2}\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{st}{s-t} + \frac{t(s+t)}{s-t} - \frac{st(s+t)}{(s-t)^2} = \frac{t(s^2-2st-t^2)}{(s-t)^2}.$$

同様に $\frac{\partial x}{\partial t} = 1$, $\frac{\partial y}{\partial t} = s$, $\frac{\partial z}{\partial t} = -1$ より

$$\frac{\partial w}{\partial s} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{y}{z}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{x}{z}\frac{\partial y}{\partial t} - \frac{xy}{z^2}\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{st}{s-t} + \frac{s(s+t)}{s-t} + \frac{st(s+t)}{(s-t)^2} = \frac{s(s^2+2st-t^2)}{(s-t)^2}.$$

問題 2　(a) 1 階偏導関数は $f_x = \cos(x-y)$, $f_y = -\cos(x-y)$. 2 階偏導関数は $f_{x^2} = f_{y^2} = -\sin(x-y)$, $f_{xy} = \sin(x-y)$. 3 階偏導関数は $f_{x^3} = f_{xy^2} = -\cos(x-y)$, $f_{x^2y} = f_{y^3} = \cos(x-y)$.
(b) 1 階偏導関数は $f_x = a(cy+dz)$, $f_y = b(cy+dz) + c(ax+by)$, $f_z = d(ax+by)$. 2 階偏導関数は $f_{x^2} = f_{z^2} = 0$, $f_{y^2} = 2bc$, $f_{xy} = ac$, $f_{xz} = ad$, $f_{yz} = bd$. 3 階偏導関数はすべて 0.

問題 3　$f$ の 1 階偏導関数は $f_x = f$, $f_y = -2yf$, 2 階偏導関数は $f_{x^2} = f$, $f_{xy} = -2yf$, $f_{y^2} = (4y^2-2)f$, 3 階偏導関数は $f_{x^3} = f$, $f_{x^2y} = -2yf$, $f_{xy^2} = (4y^2-2)f$, $f_{y^3} = -(8y^3-12y)f$ より,
(a) $f(0,0) = 1$ に注意すると, $f$ の点 $(0,0)$ まわりでのテイラー展開は

$$1 + x + \frac{x^2}{2} - y^2 + \frac{x^3}{6} - 6xy^2 + \cdots .$$

(b) $f(1,1) = 1$ に注意すると, $f$ の点 $(1,0)$ まわりでのテイラー展開は

$$1 + (x-1) - 2(y-1) + \frac{1}{2}(x-1)^2 - 2(x-1)(y-1) + (y-1)^2 \\ + \frac{1}{6}(x-1)^3 - (x-1)^2(y-1) + (x-1)(y-1)^2 + \frac{2}{3}(y-1)^3 + \cdots .$$

問題 4　(a) $f_x = 2x - y$, $f_y = -x + 3y^2$ より, $f_x = f_y = 0$ を満たす $f$ の停留点は $(x,y) = (0,0)$ および $(\frac{1}{12}, \frac{1}{6})$ の 2 点.
(b) $f_{x^2} = 2$, $f_{y^2} = 6y$, $f_{xy} = -1$ より, $f$ のヘッセ行列は

$$H_f = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 6y \end{pmatrix}.$$

(c) 停留点 $(0,0)$ におけるヘッセ行列

$$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

は $\det H_f(0,0) = -1 < 0$ より正負の固有値を持つ．従って $(0,0)$ は $f$ の鞍点．また停留点 $(\frac{1}{12}, \frac{1}{6})$ におけるヘッセ行列

$$H_f\left(\frac{1}{12}, \frac{1}{6}\right) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

は, 首座小行列式が次数の小さい順に $2 > 0$, $1 > 0$ なので, 正の固有値のみを持つ．従って $(\frac{1}{12}, \frac{1}{6})$ は $f$ の極小点.

問題 5　$g(x,y) = x^2 + y^2 - 1$ とおく．$f_x = a$, $f_y = b$ および $g_x = 2x$, $g_y = 2y$ より, 求める最大点と最小点は連立方程式

$$a = 2\lambda x, \qquad b = 2\lambda y, \qquad x^2 + y^2 = 1$$

の解の中にある．第 1,2 式より $x = \frac{a}{2\lambda}$, $y = \frac{b}{2\lambda}$ ($\Leftarrow ab \neq 0$ より $\lambda \neq 0$)．これを第 3 式に代入して

$$\frac{a^2}{4\lambda^2} + \frac{b^2}{4\lambda^2} = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \lambda = \pm\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}.$$

ゆえに $(x,y) = (\pm\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \pm\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}) =: \boldsymbol{a}_\pm$ (複号同順)．最大点と最小点は 2 点 $\boldsymbol{a}_\pm$ の中にあるが, $f(\boldsymbol{a}_\pm) = \pm\sqrt{a^2+b^2} \neq 0$ より $f(\boldsymbol{a}_+) > f(\boldsymbol{a}_-)$ なので, 最大点は $\boldsymbol{a}_+$, 最小点は $\boldsymbol{a}_-$ である.