解析学 I-1: 期末試験 (2017-07-27)

問題 1　次の積分を求めよ.

(a) $\displaystyle\int_0^1 \sum_{k=0}^{n} c_k x^k \,\mathrm{d}x$

(b) $\displaystyle\int_0^\pi (\sin x + \cos x)\,\mathrm{d}x$

(c) $\displaystyle\int_0^b x\mathrm{e}^{ax^2}\,\mathrm{d}x \qquad (a \neq 0)$

(d) $\displaystyle\int_1^a x\log x\,\mathrm{d}x \qquad (a > 0)$

(e) $\displaystyle\int_0^a \sin\sqrt{x}\,\mathrm{d}x \qquad (a \geq 0)$

(f) $\displaystyle\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \sqrt{a^2 - x^2}\,\mathrm{d}x \qquad (a \geq 0)$

問題 2　$a > b > 0$ とする. 第 1 象限内にあって 2 つの曲線 $y = x^a$ および $y = x^b$ により囲まれる有界領域の面積を V とする.

(a) V を積分ひとつで表せ.

(b) V の値を求めよ.

問題 3　次の積分を計算する.

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,\mathrm{d}x \qquad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

(a) $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,\mathrm{d}x$ が成り立つことを示せ.

(b) I_n が漸化式 $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$ $(n = 2, 3, 4, \dots)$ を満たすことを示せ.

(c) I_n の値を求めよ.

問題 4　次の問いに答えよ.

(a) 対数関数 $\log x$ $(x > 0)$ の $x = 1$ におけるテイラー展開を, 級数の収束範囲とともに書け. ただし証明は不要である.

(b) 交代調和級数 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$ が $\log 2$ に収束することを示せ.

(c) 各項が有理数の級数 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ $(a_k \in \mathbb{Q})$ で $\log 5$ に収束するものをつくれ.

解答例 (解析学 I-1: 期末試験)

問題 1 (a) $k \neq -1$ のとき $\int_0^1 x^k\,\mathrm{d}x = [\frac{x^{k+1}}{k+1}]_0^1 = \frac{1}{k+1}$ だから $\int_0^1 \sum_{k=0}^n c_k x^k\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^n c_k \int_0^1 x^k\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^n \frac{c_k}{k+1}$.
(b) $\int_0^\pi (\sin x + \cos x)\,\mathrm{d}x = [-\cos x + \sin x]_0^\pi = 2$.
(c) $\int_0^b x\mathrm{e}^{ax^2}\,\mathrm{d}x = [\frac{\mathrm{e}^{ax^2}}{2a}]_0^b = \frac{\mathrm{e}^{ab^2}-1}{2a}$.
(d) 部分積分を用いて $\int_1^a x\log x\,\mathrm{d}x = [\frac{x^2}{2}\log x]_1^a - \int_1^a \frac{x}{2}\,\mathrm{d}x = \frac{a^2}{2}\log a - [x^2]_1^a = \frac{a^2}{2}\log a - a^2 + 1$.
(e) $t = \sqrt{x}$ とおく．このとき $x = t^2$ より $\int_0^a \sin\sqrt{x}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\sqrt{a}} \sin t \cdot \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t = 2\int_0^{\sqrt{a}} t\sin t\,\mathrm{d}t$. ここで部分積分を用いて $\int_0^{\sqrt{a}} t\sin t\,\mathrm{d}t = [-t\cos t]_0^{\sqrt{a}} + \int_0^{\sqrt{a}} \cos t\,\mathrm{d}t = -\sqrt{a}\cos\sqrt{a} + [\sin t]_0^{\sqrt{a}} = \sin\sqrt{a} - \sqrt{a}\cos\sqrt{a}$. ゆえに問題の積分は $2(\sin\sqrt{a} - \sqrt{a}\cos\sqrt{a})$.
(f) $x = a\sin t$ とおくとき $\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x = \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{a^2-a^2\sin^2 t}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t = a^2\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} |\cos t|\cos t\,\mathrm{d}t = a^2\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \cos^2 t\,\mathrm{d}t = \frac{a^2}{2}\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} (1+\cos 2t)\,\mathrm{d}t = \frac{a^2}{2}[t + \frac{\sin 2t}{2}]_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} = a^2(\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\pi}{6})$.

問題 2 (a) 第 1 象限における 2 曲線の交点は $(0,0)$ と $(1,1)$ のみ. また $(0,1)$ 上 $x^a < x^b$. これより V は「曲線 $y = x^b$ と x 軸および直線 $x = 1$ により囲まれる有界領域の面積」から「曲線 $y = x^a$ と x 軸および直線 $x = 1$ により囲まれる有界領域の面積」を引いたものに等しい. 前者の面積は $\int_0^1 x^b\,\mathrm{d}x$, 後者の面積は $\int_0^1 x^a\,\mathrm{d}x$ なので $V = \int_0^1 x^b\,\mathrm{d}x - \int_0^1 x^a\,\mathrm{d}x = \int_0^1 (x^b - x^a)\,\mathrm{d}x$.
(b) $V = \int_0^1 (x^b - x^a)\,\mathrm{d}x = [\frac{x^{b+1}}{b+1} - \frac{x^{a+1}}{a+1}]_0^1 = \frac{1}{b+1} - \frac{1}{a+1}$.

問題 3 (a) $x = \frac{\pi}{2} - t$ とおくと $\cos(\frac{\pi}{2} - t) = \sin t$ より $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,\mathrm{d}x = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sin^n t\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t = -\int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sin^n t\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t\,\mathrm{d}t$.
(b) $n \geq 2$ のとき部分積分を用いて $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cdot \cos^{n-1} x\,\mathrm{d}x = [\sin x \cdot \cos^{n-1} x]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cdot (n-1)(-\sin x)\cos^{n-2}\,\mathrm{d}x = (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cdot \cos^{n-2} x\,\mathrm{d}x = (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos^2 x)\cos^{n-2} x\,\mathrm{d}x = (n-1)(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-2} x\,\mathrm{d}x - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,\mathrm{d}x) = (n-1)(I_{n-2} - I_n)$. これより $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$.
(c) 漸化式より n が偶数のとき $I_n = \frac{(n-1)!!}{n!!} I_0 = \frac{(n-1)!!}{n!!}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}x = \frac{(n-1)!!}{n!!} \cdot \frac{\pi}{2}$. 同様に n が奇数のとき $I_n = \frac{(n-1)!!}{n!!} I_1 = \frac{(n-1)!!}{n!!}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,\mathrm{d}x = \frac{(n-1)!!}{n!!}$.

問題 4 (a) 任意の $0 < x \leq 2$ に対して $\log x = \sum_{k=1}^\infty \frac{(-1)^{k-1}}{k}(x-1)^k$.
(b) 上記のテイラー展開において $x = 2$ の場合を考えればよい.
(c) 上記のテイラー展開より, $a > 0$ および $0 < \frac{x}{a} \leq 2$ ならばいつでも $\log x - \log a = \log\frac{x}{a} = \sum_{k=1}^\infty \frac{(-1)^{k-1}}{k}(\frac{x}{a} - 1)^k$ が成り立つ.

解 1 $x = 5$, $a = 4 = 2^2$ のとき $\log 5 - 2\log 2 = \sum_{k=1}^\infty \frac{(-1)^{k-1}}{k}(\frac{5}{4} - 1)^k = \sum_{k=1}^\infty \frac{(-1)^{k-1}}{k}\frac{1}{4^k}$. 従って $\log 5 = 2\log 2 + \sum_{k=1}^\infty \frac{(-1)^{k-1}}{k}\frac{1}{4^k} = \sum_{k=1}^\infty \frac{(-1)^{k-1}}{k}(2 + \frac{1}{4^k})$. 最後の級数は題意を満たす.

解 2 $x = 3$, $a = 2$ のとき $\log 3 - \log 2 = \sum_{k=1}^\infty \frac{(-1)^{k-1}}{k}(\frac{3}{2} - 1)^k = \sum_{k=1}^\infty \frac{(-1)^{k-1}}{k}\frac{1}{2^k}$. また $x = 5$, $a = 3$ のとき $\log 5 - \log 3 = \sum_{k=1}^\infty \frac{(-1)^{k-1}}{k}(\frac{5}{3} - 1)^k = \sum_{k=1}^\infty \frac{(-1)^{k-1}}{k}(\frac{2}{3})^k$. 以上より $\log 5 = (\log 5 - \log 3) + (\log 3 - \log 2) + \log 2 = \sum_{k=1}^\infty \frac{(-1)^{k-1}}{k}\{1 + \frac{1}{2^k} + (\frac{2}{3})^k\}$. 最後の級数は題意を満たす.