解析学 I-1: 中間試験 (2017-06-22)

問題 1　次の級数の収束, 発散を答えよ．収束する場合はその和を求めよ．発散する場合は $\pm\infty$ に発散するか否か答えよ．

$$\text{(a)}\quad \sum_{k=0}^{\infty} q^k \qquad\qquad \text{(b)}\quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+2)} \qquad\qquad \text{(c)}\quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{p^k}{k!}$$

問題 2　次の関数 f の導関数を求めよ．

$$\text{(a)}\quad f(x) = \cos x^3 + \cos^3 x \qquad\qquad \text{(b)}\quad f(x) = \mathrm{e}^{\sum_{k=0}^{n} c_k x^k} \qquad\qquad \text{(c)}\quad f(x) = x^{x^2}$$

問題 3　次の極限を求めよ．

$$\text{(a)}\quad \lim_{x\to\infty} x^{\alpha} \qquad\qquad \text{(b)}\quad \lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0} \left(x - \frac{\pi}{2}\right)\tan x \qquad\qquad \text{(c)}\quad \lim_{x\to 0} \frac{\sin x^2}{x}$$

問題 4　次の問いに答えよ．

(a) 平均値の定理を述べよ．

(b) 関数 f は $[a,b]$ 上連続, (a,b) 上微分可能とする．また導関数 f' は (a,b) 上負とする．このとき f は $[a,b]$ 上狭義単調減少であることを示せ．

問題 5　関数 $f(x) = 5x^3 - 2x^2 - 4x + 3$ を考える．次の問いに答えよ．

(a) f の極値点を求めよ．極大, 極小のどちらであるかも述べること．

(b) f の変曲点を求めよ．

(c) f のグラフの概形を描け．極値点, 増減, 曲がる向き (上に凸, 下に凸), 変曲点, 無限遠での挙動が分かるように描くこと．

問題 6　関数 $f(x) = \sin x$ を考える．次の問いに答えよ．

(a) f の第 n 階導関数を求めよ．

(b) n を非負整数とする．テイラーの公式を用いて f を

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k x^k + (\text{剰余項}) \qquad (c_k\text{: 定数})$$

の形に書け．剰余項も具体的に書き下すこと．

(c) 剰余項の極限を調べることにより, f の 0 におけるテイラー展開を求めよ．

解答例 (解析学 I-1: 中間試験)

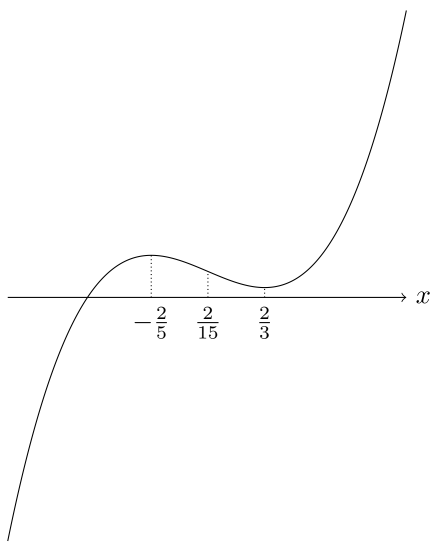
問題 1　(a) $\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ より, $|q|<1$ のとき $\frac{1}{1-q}$ に収束, $q \geq 1$ のとき ∞ に発散, $q \leq -1$ のとき発散するが $\pm\infty$ には発散しない. (b) $n \geq 2$ のとき $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+2)} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2}) = \frac{1}{2}(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2})$ より, 級数は $\frac{1}{2}(1+\frac{1}{2}) = \frac{3}{4}$ に収束する. (c) 指数関数 e^x の 0 におけるテイラー展開 $\mathrm{e}^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ より, 級数は e^p に収束する.

問題 2　(a) $f'(x) = -3x^2 \sin x^3 - 3\cos^2 x \sin x$. (b) $f'(x) = \mathrm{e}^{\sum_{k=0}^{n} c_k x^k} \sum_{k=0}^{n-1}(k+1)c_{k+1}x^k$. (c) $\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\log f(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} x^2 \log x = x(2\log x + 1)$ より, $f'(x) = f(x)\cdot x(2\log x+1) = x^{x^2+1}(2\log x+1)$.

問題 3　(a) $\alpha > 0$ のとき ∞, $\alpha = 0$ のとき 1, $\alpha < 0$ のとき 0. (b) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0} \frac{(x-\frac{\pi}{2})\sin x}{\cos x}$ と書き直すと $\frac{0}{0}$ の不定形. 分母と分子を微分した後の極限は $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0} \frac{\sin x + (x-\frac{\pi}{2})\cos x}{-\sin x} = -1$. 従ってロピタルの法則より $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0}(x-\frac{\pi}{2})\tan x = -1$. (c) 極限は $\frac{0}{0}$ の不定形. 分母と分子を微分した後の極限は $\lim_{x\to 0} 2x\cos x^2 = 0$. 従ってロピタルの法則より $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x^2}{x} = 0$.

問題 4　(a) 関数 f は $[a,b]$ 上連続, (a,b) 上微分可能とする. (ただし $a<b$.) このとき $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$ を満たす $c \in (a,b)$ が存在する. (b) 任意の $x, x' \in [a,b]$ $(x < x')$ に対して, 平均値の定理より $c \in [x,x'] \subset [a,b]$ が存在して $\frac{f(x')-f(x)}{x'-x} = f'(c) < 0$. これより $f(x) > f(x')$.

問題 5　(a) f は $\mathbb{R}$ 上微分可能なので f の極値点は停留点の中にある. $f'(x) = 15x^2-4x-4 = (3x-2)(5x+2)$ より f の停留点は $\frac{2}{3}$ と $-\frac{2}{5}$. さらに $f''(x) = 30x-4$, $f''(\frac{2}{3}) = 16 > 0$ より停留点 $\frac{2}{3}$ は f の極小点. 同様に $f''(-\frac{2}{5}) = -16 < 0$ より停留点 $-\frac{2}{5}$ は f の極大点. これ以外に極値点は存在しない. (b) $(-\infty, \frac{2}{15})$ 上 $f'' < 0$ より, f はそこで上に凸. 同様に $(\frac{2}{15}, \infty)$ 上 $f'' > 0$ より, f はそこで下に凸. 従って $\frac{2}{15}$ が f の唯一の変曲点. (c) $(-\infty, -\frac{2}{5})$ 上および $(\frac{2}{3}, \infty)$ 上 $f' > 0$ より, f はそこで狭義単調増加. 同様に $(-\frac{2}{5}, \frac{2}{3})$ 上 $f' < 0$ より, f はそこで狭義単調減少. また $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$ (複号同順). 以上より f のグラフの概形は次のようになる.



問題 6　(a) $f'(x) = \cos x = \sin(x+\frac{\pi}{2})$ より $f^{(n)}(x) = \sin(x+\frac{n\pi}{2})$. (b) テイラーの公式より, x と 0 の間に

ξ が存在して

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}=\sum_{k=0}^{n}\frac{\sin(\frac{k\pi}{2})}{k!}x^k+\frac{\sin(\xi+\frac{(n+1)\pi}{2})}{(n+1)!}x^{n+1}.$$

(c) $|\sin|\leq 1$ より, 任意の x に対して

$$0\leq\left|\frac{\sin(\xi+\frac{(n+1)\pi}{2})}{(n+1)!}x^{n+1}\right|\leq\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}\xrightarrow{n\to\infty}0.$$

これより剰余項は $n\to\infty$ の極限において x に依らず 0 に収束する. ゆえに任意の x に対して

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sin(\frac{k\pi}{2})}{k!}x^k=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1}=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots$$

が成り立つ. これが $f(x)=\sin x$ の $x=0$ におけるテイラー展開である.