直交多項式理論からみえてくる可積分系

前田 一貴　三木 啓司　辻本 諭
京都大学大学院情報学研究科

概要．　直交多項式が可積分系をはじめとする様々な分野と関連しているのはよく知られた事実である．本論文ではまず，直交多項式とその一般化について述べ，対応する可積分系について概説する．次に，直交多項式やその一般化が関連する最近の話題についても紹介する．

From Orthogonal Polynomials to Integrable Systems

Kazuki Maeda　Hiroshi Miki　Satoshi Tsujimoto
Graduate School of Informatics, Kyoto University

Abstract.　Orthogonal polynomials are known to have a close relationship to a lot of areas including integrable systems. We introduce the orthogonal polynomials and its generalizations and review the related integrable systems. We also review how such polynomials are related to recent topics.

1.　はじめに

直交多項式の理論および可積分系の理論は，数理物理，情報学，工学など幅広い分野と関連しており，各分野で重要な役割を果たしている．特に，具体的な現象やモデルの解析をすすめる際，非常に有効な理論的道具立てとなっている．一般的な直交多項式の考え方は，19 世紀の中頃，Chebyshev によって最小二乗法や確率論に関する研究の中から見出されたものである．初期の段階から応用面は重視されており，補間（近似）問題などへの応用を経て，現在ではいろいろな立場から活発な議論がなされている．一方，可積分系の理論は直交多項式より新しく，系統的な研究としては 20 世紀中旬の非線形な波動現象であるソリトンの発見とその波動現象を記述する Korteweg-de Vries (KdV) 方程式の初期値問題解法の開発以降，多くの研究者の注目を集め，現在まで急激に発展してきた分野である．

それぞれ独自の発展を遂げてきた直交多項式と可積分系であるが，近年，両分野は互いに密接に関連しており，基本的なところで共有している箇所が多いことが認識されてきた．本稿では，直交多項式の理論の中で可積分系がどのように表れるかを概説し，加えてそれら分野の理論的な結びつきがどのような分野に応用されているかを紹介したい．

本論文の構成は以下の通りである．まず，2 節において直交多項式の理論を紹介する．はじめに直交多項式のスペクトル変換を導入し，両立条件として離散戸田方程式が，また

その極限として連続時間の戸田方程式が現れることを見る．さらに，対称な直交多項式を導入し，対応する可積分系として Lotka-Volterra 方程式との関係を明らかにする．3 節では，直交多項式の一般化とそれぞれに対応する可積分系を紹介する．具体的には，3.1 節で単位円周上の直交多項式（Szegő 多項式）と Laurent 双直交多項式，3.2 節で歪直交多項式，3.3 節で双直交多項式とその特殊化として (p, q)-直交多項式，3.4 節で R_{II} 有理関数，3.5 節で多重直交多項式を取り上げる．4 節では最近の話題からいくつかを選び，直交多項式と可積分系が活躍する場面を紹介する．4.1 節では数値計算との関係として固有値計算アルゴリズムを，4.2 節では実験計画の D-optimal design を計算するアルゴリズムとの関係を，4.3 節ではランダム行列の理論のおける相関関数の計算について，4.4 節では ASEP と呼ばれる非平衡統計力学モデルの厳密解の計算について，4.5 節では出生死滅過程の厳密解の計算について，4.6 節では量子系の完全状態移行の実現と直交多項式との関係について，4.7 節では Painlevé 方程式との関係について，4.8 節では超離散可積分系の一つである箱玉系と超離散戸田方程式との関係について，それぞれ説明する．5 節では全体をまとめ，この他に上記で触れることのできなかった話題をいくつか挙げる．

2. 直交多項式の理論

可積分系の代表例の一つである戸田方程式

$$\frac{d}{dt}b_n = u_{n+1} - u_n, \quad \frac{d}{dt}u_n = u_n(b_n - b_{n-1}) \tag{2.1}$$

を半無限格子あるいは（非周期）有限格子の上で考える場合，直交多項式の理論は有効である．本節では，直交多項式の簡単な紹介の後，時間変数に相当する変形パラメータを直交多項式に導入することで，離散時間および連続時間の戸田格子とその解が得られることを示す．

2.1 直交多項式の定義

はじめに直交多項式の定義を与える．以下，係数を複素数 $\mathbb{C}$ にとる x の多項式

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \quad n \in \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \ldots\}$$

全体の集合のなす線形空間を $\mathbb{C}[x]$ によって表す．上式において，$a_n \neq 0$ の時，$\deg p = n$ を多項式 $p(x)$ の次数とよぶ．

定義 2.1 (直交多項式) $\deg p_n = n$ とする多項式列 $\{p_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ が，任意の $n, m \in \mathbb{N}_0$ に対して直交関係式

$$\mathcal{L}[p_n(x)p_m(x)] = h_n \delta_{n,m}, \quad h_n \neq 0 \tag{2.2}$$

を満たすとき，$\{p_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ を直交多項式 (orthogonal polynomials) とよぶ．ここで，$\mathcal{L}$ を $\mathbb{C}[x]$ から $\mathbb{C}$ への線型汎関数とし，$h_n \in \mathbb{C}^{\times} = \mathbb{C} - \{0\}$ を直交定数とよぶ．

ここで，線型汎関数を用いて導入される $c_n = \mathcal{L}[x^n] \in \mathbb{C}$ を n 次モーメント (moment) とよぶ．任意のモーメントは有界，つまり $|c_n| < \infty$ でなければならない．例えば，Jacobi 多項式に代表される古典直交多項式に対する線型汎関数は，$w(x)$ を正の重み関数とする実軸上の有限あるいは（半）無限区間での積分

$$\mathcal{L}[f(x)] = \int_{\mathbb{R}} f(x)w(x)dx$$

によって与えられる．重み関数を定数倍することで $\mathcal{L}[1] = c_0 = 1$ と線型汎関数を規格化することも多い．

また，直交関係式 (2.2) をみたす多項式には定数倍の不定性があり，よく用いられる規格化として，全ての直交定数 h_n を 1 に規格化することによって定まる正規直交多項式 (orthonormal polynomials) と，多項式の最高次数の係数を 1 に選ぶモニック直交多項式 (monic orthogonal polynomials) がある．以下では，モニック直交多項式を主に扱っていく．

ここでは直交関係式 (2.2) によって直交多項式を定義したが，(2.2) と同値な条件がいろいろ知られており，以下のいずれの条件も直交多項式の定義として採用してよい．

命題 2.2 以下はモニックな多項式列 $\{p_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ に対する同値な条件である．

- $\{p_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ は直交多項式，すなわち直交関係式 (2.2) をみたす．
- $0 \le k < n$ に対して $\mathcal{L}[p_n(x)x^k] = 0$ かつ $\mathcal{L}[p_n(x)x^n] \neq 0$.
- 任意の $n \in \mathbb{N}_0$ に対して，次の形式の三項間漸化式が成り立つ：

  $$xp_n(x) = p_{n+1}(x) + b_n p_n(x) + u_n p_{n-1}(x). \tag{2.3}$$

  ここで，$b_n, u_n \in \mathbb{C}$ であり，$u_0 = 0$ かつ $u_k \neq 0, k \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ とする．
- 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して，定数列 $\{c_k\}_{k=0}^{\infty}$ を用いた行列式表示をもつ：

  $$p_n(x) = \frac{1}{\Delta_n}\begin{vmatrix} c_0 & c_1 & \cdots & c_n \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_{n+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n-1} & c_n & \cdots & c_{2n-1} \\ 1 & x & \cdots & x^n \end{vmatrix}.$$

  ここで Δ_n は $\Delta_0 = 1, \Delta_n = |c_{i+j}|_{0 \le i,j < n} \neq 0$ で定義される n 次 Hankel 行列式である．

証明については，Chihara [15] などの文献を参照していただきたい．上記の命題を用いれば，三項間漸化式の係数 b_n, u_n や直交定数はモーメントや三項間漸化式の係数をもちいて，

$$b_n = \frac{\mathcal{L}[xp_n^2]}{h_n} = \frac{\widetilde{\Delta}_{n+1}}{\Delta_{n+1}} - \frac{\widetilde{\Delta}_n}{\Delta_n}, \quad u_n = \frac{h_n}{h_{n-1}} = \frac{\Delta_{n+1}\Delta_{n-1}}{\Delta_n^2}, \quad h_n = \frac{\Delta_{n+1}}{\Delta_n} = \mathcal{L}[1]\prod_{j=1}^{n} u_j$$

と表されることが簡単な計算から示される．ここで $\widetilde{\Delta}_n$ は次の n 次の行列式

$$\widetilde{\Delta}_n = \begin{vmatrix} c_0 & \cdots & c_{n-2} & c_n \\ c_1 & \cdots & c_{n-1} & c_{n+1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ c_{n-1} & \cdots & c_{2n-3} & c_{2n-1} \end{vmatrix}$$

である．たとえば，三項間漸化式の係数 u_n の表示は

$$h_n = \mathcal{L}[xp_np_{n-1}] = \mathcal{L}[(p_{n+1} + b_np_n + u_np_{n-1})p_{n-1}] = u_n\mathcal{L}[p_{n-1}p_{n-1}] = u_nh_{n-1}$$

から導かれる．これら表示から h_n, u_n, Δ_n に対する非零条件が同値であることは明らか．直交多項式に付随する線型汎関数を定めるにあたって，次の定理は有用である．

定理 2.3 (Favard の定理) 多項式列 $\{p_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ が 2 つの定数列 $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ と $\{u_n(\neq 0)\}_{n=1}^{\infty}$ で定まる三項間漸化式 (2.3) を満たすならば，$\{p_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ はモニック直交多項式であり，付随する線型汎関数 $\mathcal{L}$ は $\mathcal{L}[1] = 1$ と規格化することにより一意に定まる．

2.2 Christoffel-Darboux 恒等式と離散戸田方程式

本節では，Christoffel-Darboux 恒等式を用いることで，直交多項式に付随する測度に対して離散的なスペクトル変換を導入する．これにより，可積分系の代表例である戸田方程式との直接的な対応関係が明らかになる．

まず，準備として直交多項式の和公式である Christoffel-Darboux 恒等式を与える：

$$\sum_{k=0}^{n} (u_{k+1}u_{k+2}\cdots u_n)\, p_k(x)p_k(\lambda) = \frac{p_{n+1}(x)p_n(\lambda) - p_{n+1}(\lambda)p_n(x)}{x-\lambda}. \tag{2.4}$$

この恒等式は三項間漸化式を繰り返し用いることで示される．(2.4) の右辺は n 次多項式であり，$p_n(\lambda) \neq 0$ としてモニックな多項式列 $\{p_n^*(x)\}_{n=0}^{\infty}$ を

$$p_n^*(x) = \frac{p_{n+1}(x) + A_np_n(x)}{x-\lambda}, \quad A_n = -\frac{p_{n+1}(\lambda)}{p_n(\lambda)} \tag{2.5}$$

によって導入する．このとき線型汎関数 $\mathcal{L}^* : \mathbb{C}[x] \to \mathbb{C}$ を

$$\mathcal{L}^*[f(x)] = \mathcal{L}[(x-\lambda)f(x)]$$

で定義すると，新たな多項式列 $\{p_n^*(x)\}_{n=0}^{\infty}$ は $\mathcal{L}^*$ に関する直交多項式をなしている：

$$\mathcal{L}^*[p_n^*(x)p_m^*(x)] = h_n^*\delta_{n,m}, \quad h_n^* = A_nh_n \neq 0.$$

この直交多項式から直交多項式への変換 $\{p_n(x)\} \mapsto \{p_n^*(x)\}$ を **Christoffel** 変換とよぶ．また，**Geronimus** 変換とよばれる逆変換

$$p_n(x) = p_n^*(x) + B_np_{n-1}^*(x), \quad B_n = h_n/h_{n-1}^* \tag{2.6}$$

も存在する [88].

Christoffel 変換を何度も繰り返すことにより，次々と新たな直交多項式が生成される．この手続きで得られる直交多項式の鎖

$$\{p_n\} \to \{p_n^*\} \to \{p_n^{**}\} \to \{p_n^{***}\} \to \quad \cdots$$

を離散的な時間発展とみなすことにより，離散時間変数 s を導入することができる．ここで，各変換ごとに異なる λ を選ぶことが可能なことに注意してほしい．以下では，例えば Christoffel 変換を s 回繰り返すことで得られる線型汎関数とその直交多項式をそれぞれ $\mathcal{L}^{(s)}$ および $\{p_n^{(s)}(x)\}_{n=0}^{\infty}$ で表すことにする．

直交多項式のスペクトル変換に関する (2.5) と (2.6) の両立条件から非自励離散戸田方程式 (nonautonomous discrete Toda equation)

$$A_n^{(s+1)} + B_n^{(s+1)} + \lambda^{(s+1)} = A_n^{(s)} + B_{n+1}^{(s)} + \lambda^{(s)}, \quad A_n^{(s+1)}B_{n+1}^{(s+1)} = A_{n+1}^{(s)}B_{n+1}^{(s)}. \tag{2.7}$$

が導かれる．これまでの直交多項式を用いた議論から要請される境界条件として，半無限格子の条件 $n \in \mathbb{N}_0$，$B_0^{(s)} = 0$ が課せられている．ここで，$\lambda^{(s)}$ は s 回目の Christoffel 変換において導入した定数であり，可積分系の観点からは時刻 s ごとに自由に選ぶことのできる非自励パラメータである．

ここまでの議論は，三重対角行列で表される Jacobi 行列を用いて行うことも可能である．$\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ を非零定数の列とした時，Jacobi 行列

$$J = \begin{pmatrix} b_0 & 1 & & & \\ u_1 & b_1 & 1 & & \\ & u_2 & b_2 & 1 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

に対応して，モニック直交多項式系がひとつ定まる．これは，Favard の定理と Jacobi 行列の固有値問題 $J\psi = x\psi$ から明らかである．すなわち，Jacobi 行列の固有関数は直交多項式で与えられる：

$$\psi = (p_0(x), p_1(x), p_2(x), \dots)^\top .$$

ここで $^\top$ は転置を表す．Christoffel 変換などの直交多項式のスペクトル変換についても，Jacobi 行列の分解から自然に導くことができる．下三角行列を L，上三角行列を U，さらに単位行列を E で表すことにすると，λ を固有関数の零点集合に含まれない定数に選べば必ず次の分解が可能である：

$$J - \lambda E = L\,U.$$

ここで，L, U の具体形は

$$U = \begin{pmatrix} A_0 & 1 & & & \\ & A_1 & 1 & & \\ & & A_2 & 1 & \\ & & & \ddots & \ddots \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ B_1 & 1 & & \\ & B_2 & 1 & \\ & & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

である．この分解から得られる行列 U を用いてベクトル $\psi^* := (x-\lambda)^{-1}U\psi$ を導入することにより，Christoffel 変換および Geronimus 変換はそれぞれ

$$(x-\lambda)\psi^* = U\psi, \quad \psi = L\psi^* \tag{2.8}$$

と表され，両立条件の計算 $(x-\lambda)\psi^* = U\psi = UL\psi^*, (x-\lambda^*)\psi^* = (x-\lambda^*)L^*\psi^{**} = L^*U^*\psi^*$ から，$UL+\lambda E = L^*U^* + \lambda^* E$ を得る．この関係式の行列成分から離散戸田方程式 (2.7) が導かれる．

さらに，離散戸田方程式の一般解表示も自然に導かれる．可積分系理論において重要な広田のタウ関数に相当する行列式を

$$\tau_n^{(s)} = \begin{vmatrix} c_0^{(s)} & \cdots & c_{n-1}^{(s)} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{n-1}^{(s)} & \cdots & c_{2n-2}^{(s)} \end{vmatrix}, \quad \sigma_n^{(s)}(x) = \begin{vmatrix} c_0^{(s)} & \cdots & c_n^{(s)} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{n-1}^{(s)} & \cdots & c_{2n-1}^{(s)} \\ 1 & \cdots & x^n \end{vmatrix}$$

によって導入する．Christoffel 変換によってモーメント c_n が

$$c_n^* = \mathcal{L}^*[x^n] = \mathcal{L}[(x-\lambda)x^n] = c_{n+1} - \lambda c_n$$

と変換されることに対応して，タウ関数の行列式要素に線形関係式

$$c_n^{(s+1)} = c_{n+1}^{(s)} - \lambda^{(s)} c_n^{(s)}$$

が要請される．このとき，変数 x に $\lambda^{(s)}$ を代入すると直交多項式はタウ関数 $\tau_n^{(s)}$ の比で

$$p_n^{(s)}(\lambda^{(s)}) = \sigma_n^{(s)}(\lambda^{(s)})/\tau_n^{(s)} = (-1)^n \tau_n^{(s+1)}/\tau_n^{(s)}$$

と表すことができ，離散戸田方程式の従属変数に対するタウ関数表示も

$$A_n^{(s)} = -\frac{p_{n+1}(\lambda^{(s)})}{p_n(\lambda^{(s)})} = \frac{\tau_{n+1}^{(s+1)}\tau_n^{(s)}}{\tau_{n+1}^{(s)}\tau_n^{(s+1)}}, \quad B_n^{(s)} = \frac{h_n^{(s)}}{h_{n-1}^{(s+1)}} = \frac{\tau_{n+1}^{(s)}\tau_{n-1}^{(s+1)}}{\tau_n^{(s)}\tau_n^{(s+1)}} \tag{2.9}$$

とただちに得られる．このタウ関数をもちいれば，Christoffel 変換や Geronimus 変換は双線形形式とよばれる関係式に書きなおすことができ，

$$\begin{aligned} &(x-\lambda^{(s)})\tau_{n+1}^{(s)}\sigma_n^{(s+1)}(x) = \tau_n^{(s+1)}\sigma_{n+1}^{(s)}(x) + \tau_{n+1}^{(s+1)}\sigma_n^{(s)}(x), \\ &\tau_n^{(s+1)}\sigma_n^{(s)}(x) = \tau_n^{(s)}\sigma_n^{(s+1)}(x) + \tau_{n+1}^{(s)}\sigma_{n-1}^{(s+1)}(x) \end{aligned}$$

を得る．この関係式が成り立つことは，行列式の恒等式として知られる Jacobi の恒等式を用いることで直接証明することも可能である．

2.3 連続時間の戸田方程式

前節で導入した離散的なスペクトル変換の連続極限から連続時間の戸田方程式が得られることを示す．まず，Christoffel 変換で導入された定数 λ に，δ を微小パラメータとして $\lambda = -1/\delta$ を代入する．これにより変換後のモーメント c_k^* による n 次の Hankel 行列式は

$$\Delta_n^* = \left| c_{i+j}^* \right|_{0 \le i,j<n} = \left| c_{i+j+1} + \delta^{-1} c_{i+j} \right| = \delta^{-n} \left| c_{i+j} + \delta c_{i+j+1} \right| = \delta^{-n} \left(\Delta_n + \delta \widetilde{\Delta}_n + O(\delta^2) \right)$$

と δ で展開することができ，

$$A_n = \delta^{-1} + b_n + O(\delta), \quad B_n = \delta\, u_{n-1} + O(\delta^2)$$

が得られる．後で時間変数とみなす t を用いて，$p_n(x)$ と $p_n^*(x)$ をそれぞれ $p_n(x;t)$ と $p_n(x;t+\delta)$ で表すことにすると，(2.6) の $\delta \to 0$ の極限から

$$\frac{d}{dt} p_n(x;t) = -u_n p_{n-1}(x;t) \tag{2.10}$$

が導かれる．この関係式 (2.10) と三項間漸化式 (2.3) の両立条件から，（連続時間）戸田方程式 (2.1) が得られる．対応する半無限格子上の Hankel 行列式解も容易に導かれる．

2.4 対称直交多項式と Lotka-Volterra 方程式

ここでは対称な線型汎関数 $\mathcal{S}$ を導入し，対応する直交多項式と可積分系との関係について議論する [89]．すべての奇数次のモーメントが零，すなわち

$$S[x^{2n+1}] = 0$$

が成り立つような線型汎関数を対称な線型汎関数といい，対称な線型汎関数に付随する直交多項式を対称直交多項式 (symmetric OP) とよぶ．以下では，$\{q_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ を対称直交多項式とする．対称直交多項式に関しては，次のような等価な条件がいくつか知られている：

- 任意の $n \in \mathbb{N}_0$ に対して，$q_n(-x) = (-1)^n q_n(x)$ が成立する．
- 一般の三項間漸化式 (2.3) において常に $b_n = 0$ が成立する．すなわち

$$x\, q_n(x) = q_{n+1}(x) + v_n q_{n-1}(x), \quad n \in \mathbb{N}_0. \tag{2.11}$$

対称直交多項式の場合，モーメント $d_n = \mathcal{S}[x^n]$ からなる Hankel 行列式は

$$\left| d_{i+j} \right|_{0 \le i,j<n} = \left| d_{2(i+j)} \right|_{0 \le i,j<\mathrm{ceiling}(n/2)} \cdot \left| d_{2(i+j+1)} \right|_{0 \le i,j<\mathrm{floor}(n/2)}$$

と 2 つの Hankel 行列式の積に分解される．これにより，2 つのモーメント列 $\{d_{2n}\}_{n=0}^{\infty}$ と $\{d_{2n+2}\}_{n=0}^{\infty}$ が得られ，線型汎関数の組が

$$\mathcal{L}_1[x^n] = \mathcal{S}[x^{2n}], \quad \mathcal{L}_2[x^n] = \mathcal{S}[x^{2n+2}]$$

によって導入できる．ここで導入した 2 つ線型汎関数の間には $\mathcal{L}_2[f(x)] = \mathcal{L}_1[xf(x)]$ という関係が成り立つ．つまり，線型汎関数 $\mathcal{L}_1$ に $\lambda = 0$ の Christoffel 変換を施すことから $\mathcal{L}_2$ が得られることを示している．さらに，$\mathcal{L}_1$ と $\mathcal{L}_2$ に付随する直交多項式をそれぞれ $\{p_n^{(1)}(x)\}_{n=0}^{\infty}$ と $\{p_n^{(2)}(x)\}_{n=0}^{\infty}$ とすると，$n \in \mathbb{N}_0$ に対して，

$$q_{2n}(x) = p_n^{(1)}(x^2), \quad q_{2n+1}(x) = xp_n^{(2)}(x^2)$$

であり，$A_n^{(1)} = -p_{n+1}^{(1)}(0)/p_n^{(1)}(0)$ を用いて

$$x\, p_n^{(2)}(x) = p_{n+1}^{(1)}(x) + A_n^{(1)} p_n^{(1)}(x)$$

が成り立つ．また，$p_n^{(1)}(x)$ と $p_n^{(2)}(x)$ のみたす三項間漸化式の係数をそれぞれ $\left(b_n^{(1)}, u_n^{(1)}\right)$ と $\left(b_n^{(2)}, u_n^{(2)}\right)$ としたとき，簡単な計算から

$$b_n^{(1)} = v_{2n} + v_{2n+1}, \quad u_n^{(1)} = v_{2n-1}v_{2n}, \quad b_n^{(2)} = v_{2n+1} + v_{2n+2}, \quad u_n^{(2)} = v_{2n}v_{2n+1}$$

が得られる．後述するが，v_n は Lotka-Volterra 方程式に従う変数とみなすことができ，これら一般の直交多項式と対称直交多項式の間に成り立つ対応関係を Toda-Volterra 対応という．

次に，直交多項式の時と同様，対称直交多項式に対するスペクトル変換を導入し，対応する可積分系である Lotka-Volterra 方程式との関係を明らかにする．対称直交多項式 $\{q_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ に対する Christoffel 変換は,

$$q_n^*(x) = \frac{q_{n+2}(x) + w_n q_n(x)}{x^2 - \kappa^2}, \quad w_n = -\frac{q_{n+2}(\kappa)}{q_n(\kappa)} \tag{2.12}$$

で与えられる．この変換によって得られる多項式列 $\{q_n^*(x)\}_{n=0}^{\infty}$ は，新たな対称な線型汎関数である $\mathcal{S}^* : \mathbb{C}[x] \to \mathbb{C}$

$$\mathcal{S}^*[f(x)] = \mathcal{S}[(x^2 - \kappa^2)f(x)]$$

に関する対称直交多項式となる．変換後のモーメント d_n^* は $d_n^* = d_{n+2} - \kappa^2 d_n$ と表される．この場合においても繰り返し変換を施すことが可能である．この対称直交多項式の鎖を離散的な時間発展とみなすことができ，離散時間 s が自然に導入される．このとき，三項間漸化式 (2.11) と Christoffel 変換 (2.12) の両立条件を考えることから，$n \in \mathbb{N}_0$ について

$$v_{n+1}^{(s+1)} = v_{n+1}^{(s)} \frac{w_{n+1}^{(s)}}{w_n^{(s)}}, \quad w_n^{(s)} = w_{n-1}^{(s)} + v_{n+1}^{(s)} - v_{n-1}^{(s)} \frac{w_{n-1}^{(s)}}{w_{n-2}^{(s)}} \tag{2.13}$$

が得られる．ここでの境界条件は，$v_0^{(s)} = v_{-1}^{(s)} = w_{-1}^{(s)} + (\kappa^{(s)})^2 = w_{-2}^{(s)} + (\kappa^{(s)})^2 = 0$ である．

連続極限も戸田方程式の時と同様に (2.11) と (2.12) から得られる．$\kappa = (i\delta)^{-1}$ と選び，q_n, w_n の $\delta = 0$ 近傍での表示

$$\begin{aligned} q_n^*(x) &= q_n(x; t + \delta^2) = q_n(x; t) + \delta^2 \dot{q}_n(x; t) + O(\delta^4), \\ w_n &= \delta^{-2} + v_n + v_{n+1} + O(\delta^2) \end{aligned}$$

をもちいることにより,

$$\dot{q}_n = -v_{n-1}v_n q_{n-2} \tag{2.14}$$

を得る．ここで $\dot{q}_n = dq_n/dt$ である．上式 (2.14) と三項間漸化式 (2.11) の両立条件から，ただちに Lotka-Volterra 方程式

$$\dot{v}_n = v_n(v_{n+1} - v_{n-1})$$

が導かれる．これより，直交多項式に付随する可積分系が戸田方程式であったように，対称直交多項式に付随する可積分系が Lotka-Volterra 方程式であることがわかる．ここで新たに従属変数 u_n を

$$w_n^{(s)} = u_n^{(s)}u_{n-1}^{(s)}$$

によって導入することで，(2.13) から Lotka-Volterra 方程式の離散類似である

$$u_{2n-2}^{(s+1)}\left(u_{2n-1}^{(s+1)} - 1\right) = u_{2n}^{(s)}\left(u_{2n-1}^{(s)} - 1\right), \quad u_{2n-1}^{(s+1)}\left(u_{2n}^{(s+1)} + (\kappa^{(s+1)})^2\right) = u_{2n}^{(s)}\left(u_{2n}^{(s)} + (\kappa^{(s)})^2\right)$$

が得られる．

2.5 戸田方程式の古典直交多項式解

一般の直交多項式の中で，2 階微分作用素

$$\mathcal{H} = A(x)\partial_x^2 + B(x)\partial_x + C(x) \tag{2.15}$$

あるいはその離散類似に対する固有値問題 $\mathcal{H}\phi = \lambda\phi$ の多項式固有関数として特徴づけられる多項式列のことを古典直交多項式という．この定義に含まれる古典直交多項式は，q-超幾何関数で表される Askey-Wilson 多項式とその特殊化の観点から統一的に扱うことができ，この枠組みを Askey-Scheme と呼ぶ．この Askey-Scheme に含まれる古典直交多項式の具体例については，文献 [52] が詳しい．戸田方程式に対する古典直交多項式解，すなわち厳密解の中に古典直交多項式そのものが表れる特解については，超幾何関数で表される解も含めて様々なものが知られている [42, 44, 70, 75, 88, 101].

以下では，非自励離散戸田方程式 (2.7) の Askey-Wilson 解を例にあげる．$0 < |q| < 1$ として，$(a;q)_\infty = \prod_{j=0}^{\infty}(1 - aq^j)$, $(a;q)_n = (a;q)_\infty/(aq^n;q)_\infty$ および $(a_1,\cdots,a_r;q)_k = (a_1;q)_k\cdots(a_r;q)_k$ を用いることで，q-超幾何関数を

$${}_{r+1}\phi_r\left(\begin{matrix} a_1, a_2, \ldots, a_{r+1} \\ b_1, \ldots, b_r \end{matrix}; q, z\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a_1, a_2, \ldots, a_{r+1}; q)_k}{(b_1, \ldots, b_r; q)_k} \frac{z^k}{(q;q)_k}$$

で定義する [25]．この q-超幾何関数を用いることで，Askey-Wilson 多項式は

$$P_n(z + 1/z; a, b, c, d\,|\,q) = {}_4\phi_3\left(\begin{matrix} q^{-n}, abcdq^{n-1}, az, az^{-1} \\ ab, ac, ad \end{matrix}; q, q\right)$$

と表すことができる．このとき，Askey-Wilson 多項式のみたす三項間漸化式から，$\lambda^{(s)} = aq^s + (aq^s)^{-1}$ として，非自励離散戸田方程式 (2.7) に対する真空解あるいは 0-ソリトン解と呼ばれる特解を，

$$a_n^{(s)} = \frac{(1-abcdq^{s+n-1})(1-abq^{s+n})(1-acq^{s+n})(1-adq^{s+n})}{aq^s(1-abcdq^{s+2n-1})(1-abcdq^{s+2n})},$$
$$b_n^{(s)} = \frac{aq^s(1-q^n)(1-bcq^{n-1})(1-bdq^{n-1})(1-cdq^{n-1})}{(1-abcdq^{s+2n-2})(1-abcdq^{s+2n-1})}$$

と見出すことができる．この特解を用いることで，Darboux 変換の理論あるいは広田の双線形形式の理論から，Askey-Wilson 多項式を行列式要素とするタウ関数

$$\tau_n^{(t)} = \left| h_{i,j+n-1}^{(t)} \right|_{1\le i,j\le N},$$
$$h_{i,j}^{(t)} = \frac{(abq^t, acq^t, adq^t; q)_j}{(abcdq^{t+j-1}; q)_j (aq^t)^j} P_j(z_i + 1/z_i; aq^t, b, c, d \,|\, q)$$

および非自励離散戸田方程式の変数 A_n, B_n のタウ関数による表示

$$A_n^{(s)} = a_n^{(s)} \frac{\tau_{n+1}^{(s+1)}\tau_n^{(s)}}{\tau_{n+1}^{(s)}\tau_n^{(s+1)}}, \quad B_n^{(s)} = b_n^{(s)} \frac{\tau_{n+1}^{(s)}\tau_{n-1}^{(s+1)}}{\tau_n^{(s)}\tau_n^{(s+1)}}$$

を得る．この解は $B_0^{(s)} = 0$ を満たしており，半無限格子 ($n \in \mathbb{N}_0$) 上の解となる．無限格子上の解については，$n \in \mathbb{Z}$ を $\alpha \in \mathbb{C}$ として扱い，Askey-Wilson 多項式の三項間漸化式を 2 階の差分方程式とみなした時の級数解 [29]

$$\Xi_\alpha^{(s)}(z) = \frac{1}{z^\alpha} \frac{(aq^s z, bz, cz, dz, abcdq^{s+2\alpha-1}, q^\alpha z^2)_\infty}{(aq^{s+\alpha} z, bq^\alpha z, cq^\alpha z, dq^\alpha z, abcdq^{s+\alpha-1}, z^2)_\infty} W\left(\frac{q^{-\alpha}}{z^2}; q^{-\alpha}, \frac{aq^s}{z}, \frac{b}{z}, \frac{c}{z}, \frac{d}{z}\right)$$

を用いることで，対応するタウ関数 $\tau_\alpha^{(s)} = \left| \Xi_{\alpha+j-1}^{(s)}(z_i) \right|_{1\le i,j\le N}$ が得られる [101]．ここで，W は very-well-poised-balanced 条件をみたす q-超幾何関数である：

$$W(a; b, c, d, e, f) = {}_8\phi_7\left(\begin{matrix} a, qa^{\frac{1}{2}}, -qa^{\frac{1}{2}}, b, c, d, e, f \\ a^{\frac{1}{2}}, -a^{\frac{1}{2}}, qa/b, qa/c, qa/d, qa/e, qa/f \end{matrix} ; q, \frac{a^2q^2}{bcdef} \right).$$

3. さまざまな直交多項式

前節では，戸田方程式がスペクトル変換を通じて直交多項式と関連することをみた．本節では，同様な議論が直交多項式の一般化に対しても可能であることを紹介する．

3.1 単位円周上の直交多項式と Laurent 双直交多項式

通常，単に直交多項式と言った場合は，実軸上で測度が定義されているものを指す場合や，より一般に 2 節で述べたように線型汎関数に関して直交するものを考える場合が多い

が，複素平面上で定義された測度を用いて定義される Hermite 内積についての直交性を考える場合もある．以下では特に単位円周上での Hermite 内積が与えられている場合の直交多項式（Szegő 多項式）を考える [86] [94, Chapter XI].

$\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ で単位円盤，$\partial\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ で単位円周を表す．$z = e^{i\theta} \in \partial\mathbb{D}$ でパラメータ $\theta \in [0, 2\pi)$ を導入し，$\sigma(\theta)$ を $\partial\mathbb{D}$ 上の自明でない（台が無限集合となる）測度とする．L^2 内積を

$$\langle f(z), g(z)\rangle = \int_0^{2\pi} \overline{f(e^{i\theta})} g(e^{i\theta}) d\sigma(\theta) \tag{3.1}$$

で定める．ただし，$\bar{z}$ で z の複素共役を表す．以下で考えるのは，n 次のモニックな多項式で内積 (3.1) について直交するような $\Phi_n(z)$ である：

$$\langle \Phi_m(z), \Phi_n(z)\rangle = h_n\delta_{m,n}, \quad h_n \neq 0.$$

これを **Szegő** 多項式 (Szegő polynomials) という．同値な条件として

$$\langle z^m, \Phi_n(z)\rangle = h_n\delta_{m,n}, \quad m = 0, 1, \ldots, n,$$

が成り立つ．したがって，モーメントを

$$c_n = \int_0^{2\pi} e^{in\theta} d\sigma(\theta), \quad n \in \mathbb{Z},$$

で定めれば，$\overline{e^{in\theta}} = e^{-in\theta}$ より，$\Phi_n(z)$ の行列式表示が得られる：

$$\Phi_n(z) = \frac{1}{T_n}\begin{vmatrix} c_0 & c_1 & \cdots & c_n \\ c_{-1} & c_0 & \cdots & c_{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{-n+1} & c_{-n+2} & \cdots & c_1 \\ 1 & z & \ldots & z^n \end{vmatrix}. \tag{3.2}$$

ただし，T_n は n 次の Toeplitz 行列式である：

$$T_0 = 1, \quad T_n = |c_{-i+j}|_{1\le i,j\le n}, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

定義より $c_{-n} = \overline{c_n}$ であることに注意しておく．

$\Phi_n(z)$ に対して，その反転多項式を

$$\Phi_n^*(z) = z^n\overline{\Phi_n}(z^{-1})$$

で定める．このとき，漸化式についての次の結果が知られている．

命題 3.1 (Szegő の漸化式**)** $\Phi_n(z)$ と $\Phi_n^*(z)$ の間に，関係式

$$\begin{pmatrix}\Phi_{n+1}(z)\\ \Phi_{n+1}^*(z)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z & \alpha_{n+1} \\ \overline{\alpha_{n+1}}z & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\Phi_n(z)\\ \Phi_n^*(z)\end{pmatrix}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{3.3}$$

が成立する．ただし，

$$\alpha_n = \Phi_n(0) = (-1)^n \frac{\hat{T}_n}{T_n}, \quad \hat{T}_n = |c_{-i+j+1}|_{1\le i,j\le n}.$$

α_n を反射係数（Verblunsky 係数）といい，$\alpha_n \in \mathbb{D}$ を満たす．通常の直交多項式の Favard の定理 2.3 に対応するものとして，次が成立する．

定理 3.2 (Verblunsky's Theorem) $\partial\mathbb{D}$ 上で定義された測度 σ と反射係数の列 $\{\alpha_n \in \mathbb{D}\}_{n=0}^{\infty}$ は，c_0 の任意性を除いて一対一対応する．

漸化式 (3.3) を用いると，$\Phi_n(z)$ について閉じた三項間漸化式を導出することができる．

$$z\Phi_n(z) = \Phi_{n+1}(z) - \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}\Phi_n(z) + \left(1 - |\alpha_n|^2\right)\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} z\Phi_{n-1}(z), \quad n = 0, 1, 2, \ldots. \tag{3.4}$$

ただし，$\Phi_{-1}(z) = 0$ とする．右辺第 3 項に繰り返し (3.4) を適用していくことで，Szegő 多項式と次の形の下 Hessenberg 行列の固有値問題を関連付けることができる．

$$H\mathbf{\Phi} = z\mathbf{\Phi}, \quad \mathbf{\Phi} = \begin{pmatrix}\Phi_0(z) & \Phi_1(z) & \ldots\end{pmatrix}^\top,$$

$$H = (h_{i,j})_{1\le i,j}, \quad h_{i,j} = \begin{cases} 0, & i+1 < j, \\ 1, & i+1 = j, \\ -\overline{\alpha_{j-1}}\beta_j\beta_{j+1}\ldots\beta_{i-1}\alpha_i, & i+1 > j, \end{cases} \quad \beta_n = 1 - |\alpha_n|^2.$$

Szegő 多項式を一般化したものとして，**Laurent** 双直交多項式 (Laurent biorthogonal polynomials) がある [8, 31, 40, 112]．Laurent 多項式 $\sum_{k=-m}^{n} a_k z^k$ 全体を $\mathbb{C}[z, z^{-1}]$ で表す．線型汎関数 $\mathcal{L} : \mathbb{C}[z, z^{-1}] \to \mathbb{C}$ について，モーメントを

$$c_n = \mathcal{L}[z^n], \quad n \in \mathbb{Z},$$

で定める．ここで，$T_n = |c_{-i+j}|_{1\le i,j\le n} \neq 0, \hat{T}_n = |c_{-i+j+1}|_{1\le i,j\le n} \neq 0, n = 1, 2, \ldots,$ が満たされるものとする．多項式 $\Phi_n(z)$ と $\Psi_n(z)$ を

$$\Phi_n(z) = \frac{1}{T_n}\begin{vmatrix} c_0 & c_1 & \cdots & c_n \\ c_{-1} & c_0 & \cdots & c_{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{-n+1} & c_{-n+2} & \cdots & c_1 \\ 1 & z & \cdots & z^n \end{vmatrix}, \quad \Psi_n(z) = \frac{1}{T_n}\begin{vmatrix} c_0 & c_1 & \cdots & c_{n-1} & 1 \\ c_{-1} & c_0 & \cdots & c_n & z \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ c_{-n} & c_{-n+1} & \cdots & c_{-1} & z^n \end{vmatrix}$$

で定義する．この定義は Szegő 多項式の行列式表示 (3.2) と同じだが，一般に $c_{-n} \neq \overline{c_n}$ であるから，$\Phi_n(z), \Psi_n(z)$ は Szegő 多項式を含むクラスの n 次モニック多項式となっている．そして，双直交関係式

$$\mathcal{L}[\Phi_m(z)\Psi_n(z^{-1})] = h_n\delta_{m,n}, \quad h_n \neq 0,$$

が成立することが容易にわかる．同値な関係式として，

$$\mathcal{L}[z^{-m}\Phi_n(z)] = \mathcal{L}[z^m\Psi_n(z^{-1})] = h_n\delta_{m,n}, \quad m = 0, 1, \ldots, n, \tag{3.5}$$

がある．

Laurent 双直交多項式は，Szegő 多項式の三項間漸化式 (3.3) と同じ形の漸化式を満たすことが言える．

命題 **3.3** $\Phi_n(z)$ は次の漸化式を満たす．

$$\Phi_{n+1}(z) + u_n\Phi_n(z) = z\left(\Phi_n(z) + v_n\Phi_{n-1}(z)\right), \quad n = 0, 1, 2, \ldots. \tag{3.6}$$

ただし，

$$u_n = -\frac{\Phi_{n+1}(0)}{\Phi_n(0)} = \frac{T_n\hat{T}_{n+1}}{T_{n+1}\hat{T}_n}, \quad v_n = u_n\frac{\mathcal{L}[z^{-n}\Phi_n(z)]}{\mathcal{L}[z^{-n+1}\Phi_{n-1}(z)]} = \frac{T_{n-1}\hat{T}_{n+1}}{T_n\hat{T}_n}.$$

また，Favard の定理 2.3 の類似も成立する．

定理 **3.4** $\Phi_n(z)$ が漸化式 (3.6) を満たすとする．u_n, v_n が全て非零であるとき，関係式 (3.5) を満たす線型汎関数 $\mathcal{L}$ が c_0 の任意性を除いて一意に定まる．

この節の最後に，Laurent 双直交多項式と離散可積分系との関係を見ておこう．そのために，Laurent 双直交多項式のスペクトル変換と時刻 $s \in \mathbb{N}_0$ を次で導入する：

$$(z - \lambda^{(s)})\Phi_n^{(s+1)}(z) = \Phi_{n+1}^{(s)}(z) + a_n^{(s)}\Phi_n^{(s)}(z), \quad a_n^{(s)} = -\frac{\Phi_{n+1}^{(s)}(\lambda^{(s)})}{\Phi_n^{(s)}(\lambda^{(s)})}. \tag{3.7}$$

ただし，$\lambda^{(s)}$ は s 毎に選べるパラメータである．これは通常の直交多項式に対する Christoffel 変換 (2.5) の類似であり，もし $\Phi_n^{(s)}(z)$ が $\mathcal{L}^{(s)}$ に関する Laurent 双直交多項式であれば，任意の $f(z) \in \mathbb{C}[z, z^{-1}]$ に対して $\mathcal{L}^{(s+1)}$ を

$$\mathcal{L}^{(s+1)}[f(z)] = \mathcal{L}^{(s)}[(z - \lambda^{(s)})f(z)]$$

で定めれば，$\Phi_n^{(s+1)}(z)$ もまた $\mathcal{L}^{(s+1)}$ に関して Laurent 双直交多項式となることがわかる．対応して，モーメントの時間発展式も

$$c_n^{(s+1)} = c_{n+1}^{(s)} - \lambda^{(s)}c_n^{(s)}$$

で与えられる．また，Geronimus 変換 (2.6) にあたる逆変換も

$$(1 + b_n^{(s)})\Phi_n^{(s)}(z) = \Phi_n^{(s+1)}(z) + b_n^{(s)}z\Phi_{n-1}^{(s+1)}(z), \quad b_n^{(s)} = -\frac{v_n^{(s)}}{a_{n-1}^{(s)}}, \tag{3.8}$$

により与えることができる．$a_n^{(s)}, b_n^{(s)}$ を Toeplitz 行列式を用いて書けば，

$$a_n^{(s)} = \frac{T_n^{(s)} T_{n+1}^{(s+1)}}{T_{n+1}^{(s)} T_n^{(s+1)}}, \quad b_n^{(s)} = -\frac{T_{n-1}^{(s+1)} \hat{T}_{n+1}^{(s)}}{T_n^{(s+1)} \hat{T}_n^{(s)}}. \tag{3.9}$$

(3.7) と (3.8) の両立条件として，

$$a_n^{(s+1)} + \lambda^{(s+1)}(1 + b_n^{(s+1)}) = a_n^{(s)} \frac{1 + b_{n+1}^{(s)}}{1 + b_n^{(s)}} + \lambda^{(s)}(1 + b_{n+1}^{(s)}),$$

$$a_{n-1}^{(s+1)} b_n^{(s+1)} = a_n^{(s)} b_n^{(s)} \frac{1 + b_{n+1}^{(s)}}{1 + b_n^{(s)}}$$

が得られる．これは非自励離散相対論戸田方程式 (nonautonomous discrete relativistic Toda equation) と呼ばれるものになっている [49, 63]．このような Laurent 双直交多項式との関係から，非自励離散相対論戸田方程式の半無限格子上の解を (3.9) で与えることができる．

本稿では触れなかったが，この他に Szegő 多項式と Schur flow，もしくは離散 modified KdV 方程式との関連がある．これは，Szegő 多項式に対応する内積を定める測度に対してある 1 パラメータ変形を考えることで導出されるものである．詳細は [64] を参照．

3.2 歪直交多項式

ここでは，歪直交多項式 [18, 26, 58, 68] と呼ばれるランダム行列の理論から導入された概念について紹介する．双 2 次形式 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ に歪対称性

$$\langle f, g \rangle = -\langle g, f \rangle$$

を課したものは（内積の公理は満たさないが）歪対称内積と呼ばれる．歪対称内積の一例として，ランダム行列の理論においては次の形のものがしばしば考えられる：

$$\langle f, g \rangle_{\beta=1} = \iint \operatorname{sgn}(x - y) f(x) g(y) d\rho(x) d\rho(y).$$

歪対称内積に関して，次の “ひねった” 直交性

$$\begin{aligned} &\langle q_{2m}(x), q_{2n+1}(x) \rangle = r_n \delta_{mn}, \quad r_n \neq 0, \\ &\langle q_{2m}(x), q_{2n}(x) \rangle = \langle q_{2m+1}(x), q_{2n+1}(x) \rangle = 0, \\ &\deg(q_n(x)) = n \end{aligned} \tag{3.10}$$

を満足する多項式列 $\{q_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ を歪直交多項式 (skew orthogonal polynomials) という．歪直交多項式を扱う上で一つ注意すべきことがある．それは，歪直交多項式にはある不定性が存在することである．具体的には，関係式

$$\tilde{q}_{2n}(x) = q_{2n}(x), \quad \tilde{q}_{2n+1}(x) = q_{2n+1}(x) + \alpha_n q_{2n}(x)$$

により定められた多項式列 $\{\tilde{q}_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ もまた歪直交多項式の定義式 (3.10) を満たす．ただし，偶数次の歪直交多項式は一意に定まることに留意しておく．歪直交多項式の大きな特徴としては，通常直交多項式やその一般化はいわゆる行列式表示を持つが，歪直交多項式は行列式ではなくパフィアンで書き下すことができる [1].

命題 3.5 歪直交多項式 $\{q_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ は以下の表示を持つ：

$$
\begin{aligned}
q_{2n}(x) &= \frac{\mathrm{Pf}(0,1,\ldots,2n,x)}{\mathrm{Pf}(0,1,\ldots,2n-1)},\\
q_{2n+1}(x) &= \frac{\mathrm{Pf}(0,1,\ldots,2n-1,2n+1,x)}{\mathrm{Pf}(0,1,\ldots,2n-1)} + \alpha_n q_{2n}(x),\\
\mathrm{Pf}(i,j) &= \langle x^i, x^j\rangle, \quad \mathrm{Pf}(i,x) = x^i.
\end{aligned}
$$

ここで，パフィアン $\mathrm{Pf}(i_0,\ldots,i_{2n-1})$ とは行列式の一種の拡張であり，次の形で定義される：

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Pf}(i_0,\ldots,i_{2n-1}) &= \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_{2n}} \frac{\mathrm{sgn}\,\sigma}{n!2^n} \prod_{0\le i\le n-1} \mathrm{Pf}(i_{\sigma(2i)}, i_{\sigma(2i+1)}),\\
\mathrm{Pf}(i_k,i_l) &= -\mathrm{Pf}(i_l,i_k).
\end{aligned}
$$

例えば，$\mathrm{Pf}(a,b,c,d) = \mathrm{Pf}(a,b)\mathrm{Pf}(c,d) - \mathrm{Pf}(a,c)\mathrm{Pf}(b,d) + \mathrm{Pf}(a,d)\mathrm{Pf}(b,c)$ である．パフィアンは行列式同様様々な性質を持つことが知られている．詳細については，例えば [32] の 2 章や [51] が詳しい.

歪直交多項式に付随する可積分系としては Adler らによる Pfaff 格子 [1,3] と呼ばれるものが知られているが，ここでは Pfaff 格子の離散化についてとりあげる．対応する方程式を導出するためにまず，離散スペクトル変換すなわち離散的な 1 パラメーター変形を導出する．無限個の時間変数 $t_1, t_2, \ldots$ ならびに定数 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ を用いて 1 パラメーター変形

$$
\langle f(x), g(x)\rangle^{t_i+1} = \langle (x-\lambda_i)f(x), (x-\lambda_i)g(x)\rangle
$$

を導入する（動かさない変数は省略）．このとき，歪直交多項式の不定性を考慮に入れると，対応する歪直交多項式の離散スペクトル変換は

$$
\begin{aligned}
q_{2n}^{t_i+1}(x) &= \frac{1}{x-\lambda_i}\sum_{k=0}^{n} \frac{r_n}{r_k}\cdot \frac{q_{2k+1}(x)q_{2k}(\lambda_i) - q_{2k}(x)q_{2k+1}(\lambda_i)}{q_{2n}(\lambda_i)},\\
q_{2n+1}^{t_i+1}(x) &= \frac{1}{x-\lambda_i}\left(q_{2n+2}(x) - \frac{q_{2n+2}(\lambda_i)}{q_{2n}(\lambda_i)} q_{2n}(x)\right) + \alpha_n q_{2n}^{t_i+1}(x)
\end{aligned}
$$

で記述される．このスペクトル変換およびパフィアン表示を用いることで，偶数次の歪直交多項式系列が満たす非自明な関係式

$$
\begin{aligned}
&(x-\lambda_j)q_{2n}^{t_j+1}(x) - (x-\lambda_i)q_{2n}^{t_i+1}(x) = (x-\lambda_i)(x-\lambda_j)A_n q_{2n-2}^{t_i+1,t_j+1}(x) - B_n q_{2n}(x),\\
&(x-\lambda_i)(x-\lambda_j)q_{2n}^{t_i+1,t_j+1}(x) - q_{2n+2}(x) = (x-\lambda_j)C_n q_{2n}^{t_j+1}(x) - (x-\lambda_i)D_n q_{2n}^{t_i+1}(x)
\end{aligned}
\tag{3.11}
$$

が得られる．ここで，係数 A, B, C, D はそれぞれタウ関数

$$\tau_n = \mathrm{Pf}(0, 1, \ldots, 2n-1), \quad \mathrm{Pf}(i, j) = \langle x^i, y^j \rangle$$

を用いて

$$\begin{aligned}
A_n &= (\lambda_i - \lambda_j)\frac{\tau_{n+1}\tau_{n-1}^{t_i+1,t_j+1}}{\tau_n^{t_i+1}\tau_n^{t_j+1}}, \quad B_n = (\lambda_i - \lambda_j)\frac{\tau_n\tau_n^{t_i+1,t_j+1}}{\tau_n^{t_i+1}\tau_n^{t_j+1}} \\
C_n &= (\lambda_i - \lambda_j)^{-1}\frac{\tau_{n+1}^{t_i+1}\tau_n^{t_j+1}}{\tau_{n+1}\tau_n^{t_i+1,t_j+1}}, \quad D_n = (\lambda_i - \lambda_j)^{-1}\frac{\tau_{n+1}^{t_j+1}\tau_n^{t_i+1}}{\tau_{n+1}\tau_n^{t_i+1,t_j+1}}
\end{aligned}$$

と書ける．式 (3.11) を偶数次の歪直交多項式に対する Lax 対とみなすことで，両立条件から可積分な方程式

$$\begin{aligned}
&A_n^{t_i+1,t_j+1} - A_{n+1} + B_{n+1} - B_n^{t_i+1,t_j+1} = C_n^{t_j+1} - C_n^{t_i+1} + D_n^{t_i+1} - D_n^{t_j+1}, \\
&A_n^{t_i+1}C_{n-1}^{t_i+1} = A_nC_n, \quad A_n^{t_j+1}D_{n-1}^{t_j+1} = A_nD_n, \\
&B_n^{t_i+1}D_n^{t_i+1} = B_{n+1}D_n, \quad B_n^{t_j+1}C_n^{t_j+1} = B_{n+1}C_n,
\end{aligned}$$

が導かれる．この方程式は構成法から，Pfaff 格子の離散版に相当するものである．ただし，Pfaff 格子の場合との相違点として，「方程式が $2+1$ 次元の式で記述されていること・解がパフィアンの有理式で正確に記述されていること」があげられる．

ここで述べた方程式は偶数次の歪直交多項式に注目して得られた式であるが，実は奇数次の方も含んだ形で対応する離散可積分系を導出することが可能である．その際は方程式の形自体は変わらないが各従属変数が 2×2 行列値関数へと置き換わる．詳細については [60] を参照されたい．

3.3 双直交多項式

より一般の双直交多項式 (biorthogonal polynomials) について議論し [2, 35, 36, 103]，そのスペクトル変換の両立条件として離散 2 次元戸田方程式が導出されることを見る [100].

一般に非対称な双線型汎関数 $\mathcal{B} : \mathbb{C}[z] \times \mathbb{C}[z] \to \mathbb{C}$ を考え，そのモーメントを

$$c_{i,j} = \mathcal{B}[z^i, z^j]$$

で定義する．そして，n 次のモニック多項式 $\Phi_n(z), \Psi_n(z)$ を

$$\Phi_n(z) = \frac{1}{\tau_n}\begin{vmatrix} c_{0,0} & c_{0,1} & \cdots & c_{0,n-1} & 1 \\ c_{1,0} & c_{1,1} & \cdots & c_{1,n-1} & z \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ c_{n,0} & c_{n,1} & \cdots & c_{n,n-1} & z^n \end{vmatrix}, \quad \Psi_n(z) = \frac{1}{\tau_n}\begin{vmatrix} c_{0,0} & c_{0,1} & \cdots & c_{0,n} \\ c_{1,0} & c_{1,1} & \cdots & c_{1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n,0} & c_{n,1} & \cdots & c_{n,n} \\ 1 & z & \cdots & z^n \end{vmatrix} \tag{3.12}$$

で定める．ただし，$\tau_0 = 1, \tau_n = |c_{i,j}|_{0\le i,j\le n-1}, n = 1, 2, \ldots,$ は全て非零であると仮定する．このとき，

$$\mathcal{B}[z^m, \Psi_n(z)] = \mathcal{B}[\Phi_n(z), z^m] = \frac{\tau_{n+1}}{\tau_n}\delta_{m,n}, \quad m = 0, 1, \ldots, n,$$

であるから，双直交関係式

$$\mathcal{B}[\Phi_m(z), \Psi_n(z)] = \frac{\tau_{n+1}}{\tau_n}\delta_{m,n}$$

の成立がわかる．

一般の双直交多項式について，通常の直交多項式のように何項かで閉じた漸化式は成立しないが，以下のようにスペクトル変換と離散時間 $s, s^\dagger \in \mathbb{N}_0$ を導入することはできる．

$$(z - \delta^{(s)})\Phi_n^{s+1,s^\dagger}(z) = \Phi_{n+1}^{s,s^\dagger}(z) + q_n^{s,s^\dagger}\Phi_n^{s,s^\dagger}(z), \quad q_n^{s,s^\dagger} = -\frac{\Phi_{n+1}^{s,s^\dagger}(\delta^{(s)})}{\Phi_n^{s,s^\dagger}(\delta^{(s)})}, \tag{3.13}$$

$$(z - \epsilon^{(s^\dagger)})\Psi_n^{s,s^\dagger+1}(z) = \Psi_{n+1}^{s,s^\dagger}(z) + q_n^{*\,s,s^\dagger}\Psi_n^{s,s^\dagger}(z), \quad q_n^{*\,s,s^\dagger} = -\frac{\Psi_{n+1}^{s,s^\dagger}(\epsilon^{(s^\dagger)})}{\Psi_n^{s,s^\dagger}(\epsilon^{(s^\dagger)})}, \tag{3.14}$$

$$\Phi_n^{s,s^\dagger}(z) = \Phi_n^{s,s^\dagger+1}(z) + e_n^{s,s^\dagger}\Phi_{n+1}^{s,s^\dagger+1}(z), \quad e_n^{s,s^\dagger} = \frac{\tau_{n-1}^{s,s^\dagger}\tau_{n+1}^{s,s^\dagger}}{(\tau_n^{s,s^\dagger})^2 q_{n-1}^{*\,s,s^\dagger}}, \tag{3.15}$$

$$\Psi_n^{s,s^\dagger}(z) = \Psi_n^{s+1,s^\dagger}(z) + e_n^{*\,s,s^\dagger}\Psi_{n+1}^{s+1,s^\dagger}(z), \quad e_n^{*\,s,s^\dagger} = \frac{\tau_{n-1}^{s,s^\dagger}\tau_{n+1}^{s,s^\dagger}}{(\tau_n^{s,s^\dagger})^2 q_{n-1}^{s,s^\dagger}}. \tag{3.16}$$

対応して，双線型汎関数の時間発展

$$\mathcal{B}^{s+1,s^\dagger}[f(z), g(z)] = \mathcal{B}^{s,s^\dagger}[(z-\delta^{(s)})f(z), g(z)], \quad \mathcal{B}^{s,s^\dagger+1}[f(z), g(z)] = \mathcal{B}^{s,s^\dagger}[f(z), (z-\epsilon^{(s)})g(z)],$$

およびモーメントの時間発展

$$c_n^{s+1,s^\dagger} = c_{n+1}^{s,s^\dagger} - \delta^{(s)}c_n^{s,s^\dagger}, \quad c_n^{s,s^\dagger+1} = c_{n+1}^{s,s^\dagger} - \epsilon^{(s^\dagger)}c_n^{s,s^\dagger} \tag{3.17}$$

が導入される．(3.13) と (3.15) の両立条件として

$$q_n^{s,s^\dagger+1} + e_n^{s+1,s^\dagger} = q_n^{s,s^\dagger} + e_{n+1}^{s,s^\dagger}, \quad q_{n-1}^{s,s^\dagger+1}e_n^{s+1,s^\dagger} = q_n^{s,s^\dagger}e_n^{s,s^\dagger}$$

が得られる．これが離散 **2** 次元戸田方程式 (discrete two-dimensional Toda equation) である [33, 99]．その半無限格子上の行列式解が，$q_n^{s,s^\dagger}, e_n^{s,s^\dagger}$ を計算することで，

$$q_n^{s,s^\dagger} = \frac{\tau_n^{s,s^\dagger}\tau_{n+1}^{s+1,s^\dagger}}{\tau_{n+1}^{s,s^\dagger}\tau_n^{s+1,s^\dagger}}, \quad e_n^{s,s^\dagger} = \frac{\tau_{n+1}^{s,s^\dagger}\tau_{n-1}^{s,s^\dagger+1}}{\tau_n^{s,s^\dagger}\tau_n^{s,s^\dagger+1}}$$

で与えられることがわかる．ただし，行列式の成分 $c_n^{s,s^\dagger}$ は関係式 (3.17) を満たす任意関数である．

双直交多項式は，通常の直交多項式をはじめとする種々の直交関係式を満たす多項式をその特殊な場合として含み，対応して離散 2 次元戸田方程式も特殊化され，離散戸田方程式をはじめとする種々の離散可積分系が現れる．さらに，無限個の独立変数（離散時間）を導入することで KP 階層の類似である**離散 2 次元戸田階層** (discrete two-dimensional Toda hierarchy) が導出され，これらの方程式の特殊化としてまた色々な離散可積分系が現れる [100, 101, 103].

以下ではその中から例として，(p,q)**-直交多項式**への特殊化について概要を述べる [45]. ここで，p,q $(p \geq q)$ は互いに素な正の整数とする．(p,q)-直交多項式とは，ある線型汎関数 $\mathcal{L} : \mathbb{C}[z] \to \mathbb{C}$ に対して，次の双直交関係式

$$\mathcal{L}[P_m(z^p)Q_n(z^q)] = h_n\delta_{m,n}, \quad h_n \neq 0,$$

を満たすようなモニックな n 次多項式列 $\{P_n(z)\}_{n=0}^{\infty}, \{Q_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$ のことである．このとき，次の $p+q+1$ 項間漸化式の成立が示される：

$$z^q P_n(z) = P_{n+q}(z) + a_{q-1,n}P_{n+q-1}(z) + \cdots + a_{-p,n}P_{n-p}(z),$$
$$z^p Q_n(z) = Q_{n+p}(z) + a^{\dagger}_{p-1,n}Q_{n+p-1}(z) + \cdots + a^{\dagger}_{-q,n}Q_{n-q}(z).$$

$\mathcal{L}$ の n 次モーメントを $c_n = \mathcal{L}[z^n]$ で定めると，$P_n(z), Q_n(z)$ はそれぞれ，一般の双直交多項式 $\Phi_n(z), \Psi_n(z)$ の行列式表示 (3.12) において，モーメントの簡約条件 $c_{i,j} = c_{ip+jq}$ を課したものとなることがわかる．特に $p = q = 1$ ならば $P_n(z) = Q_n(z)$ であり，通常の直交多項式となる．対応してスペクトル変換 (3.13)–(3.16) も簡約され，両立条件として非自励離散戸田ヒエラルキーが導出される．

さらに，2.4 節で直交多項式に導入した対称性は，次のように一般化することができる：

$$P_n(\omega z) = \omega^n P_n(z), \quad Q_n(\omega z) = \omega^n Q_n(z).$$

ただし，ω は 1 の $p+q$ 乗根である．これにより，$k \in \mathbb{N}_0$ と $l = 1, 2, \ldots, p+q-1$ について $c_{(p+q)k+l} = 0$ という条件が加わり，$p+q+1$ 項間漸化式は

$$z^q P_n(z) = P_{n+q}(z) + v_n P_{n-p}(z), \qquad z^p Q_n(z) = Q_{n+p}(z) + v^{\dagger}_n Q_{n-q}(z) \tag{3.18}$$

と簡約化される．ここで $v_n = a_{-p,n}, v^{\dagger}_n = a^{\dagger}_{-q,n}$ とする．対応するスペクトル変換を

$$P^*_n(z) = \frac{P_{n+p+q}(z) + w_n P_n(z)}{z^{p+q} - \lambda^{p+q}}, \qquad Q^{\star}_n(z) = \frac{Q_{n+p+q}(z) + w^{\dagger}_n Q_n(z)}{z^{p+q} - \lambda^{\dagger\, p+q}} \tag{3.19}$$

で表せば，(3.18) と (3.19) における第 1 式の両立条件から，

$$v^{(s)}_{p-1} = v^{(s)}_{p-2} = \cdots = w^{(s)}_{-1} + (\lambda^{(s)})^{p+q} = w^{(s)}_{-2} + (\lambda^{(s)})^{p+q} = \cdots = 0$$

を境界条件とする離散系

$$v^{(s+1)}_{n+p} = v^{(s)}_{n+p}\frac{w^{(s)}_{n+p}}{w^{(s)}_n}, \quad w^{(s)}_n = w^{(s)}_{n-q} + v^{(s)}_{n+p} - v^{(s)}_{n-q}\frac{w^{(s)}_{n-q}}{w^{(s)}_{n-p-q}}$$

を得る．さらに，新たな従属変数 $u_n^{(s)}$ を $u_{-1}^{(s)} = \cdots = u_{-p-q+1}^{(s)} = 1$，$u_{-p-q}^{(s)} = -(\lambda^{(s)})^{p+q}$ と

$$w_n^{(s)} = \prod_{j=0}^{p+q-1} u_{n-j}^{(s)}, \qquad n \in \mathbb{N}_0$$

によって導入する．これにより，非自励離散 (p,q)-hungry Lotka-Volterra 方程式

$$\left(\prod_{j=0}^{q-1} u_{n-q+1+j}^{(s+1)} - \widetilde{\lambda}_n^{(s+1)}\right)\prod_{j=0}^{p-1} u_{n-q-j}^{(s+1)} = \left(\prod_{j=0}^{q-1} u_{n-q+1+j}^{(s)} - \widetilde{\lambda}_n^{(s)}\right)\prod_{j=0}^{p-1} u_{n+1+j}^{(s)}$$

が得られる．ここでの非自励パラメータ $\widetilde{\lambda}_n^{(s)}$ は

$$\widetilde{\lambda}_n^{(s)} = \begin{cases} -(\lambda^{(s)})^{p+q} & \text{if} \quad \mathrm{mod}\ (n, p+q) \in \{0, 1, \ldots, q-1\} \\ 1 & \text{otherwise} \end{cases}$$

で定義される．この方程式は，対称な (p,q)-直交多項式の自明な対称性から，$(u_n, v_n, w_n, \lambda, s, p, q) \mapsto (u_n^\dagger, v_n^\dagger, w_n^\dagger, \lambda^\dagger, s^\dagger, q, p)$ と置き換えることで得られる方程式とタウ関数を共有している．さらに，媒介変数として $\xi_n^{(s)} = \prod_{j=0}^{q-1} u_{n-q+1+j}^{(s)} - \widetilde{\lambda}_n^{(s)}$ を導入すると減算のない力学系が得られ，対応する超離散力学系の導出も可能となる．特に，対称な $(p,1)$-直交多項式の場合，対応する可積分系の組として加法的 hungry Lotka-Volterra 方程式および乗法的 hungry Lotka-Volterra 方程式の離散類似 [77, 93, 102] が得られ，数値計算への応用も精力的に研究されている [30].

3.4　R_{II} 有理関数と R_{II} 多項式

これまでは主に多項式とその直交性について考えてきたが，自然な拡張として有理関数で直交性を持つものを考えることができる．この節では，その一つの例として R_{II} 有理関数を取り上げる [38, 113].

まず，直交多項式と三重対角行列（Jacobi 行列）の固有値問題の対応関係を一般化し，次の三重対角行列束の一般化固有値問題からはじめる．

$$A\boldsymbol{R} = zB\boldsymbol{R},$$

$$A = \begin{pmatrix} v_0 & \alpha_0 & & & \\ \beta_1 w_1 & v_1 & \alpha_1 & & \\ & \beta_2 w_2 & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} u_0 & 1 & & & \\ w_1 & u_1 & 1 & & \\ & w_2 & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{R} = \begin{pmatrix} R_0(z) & R_1(z) & \ldots \end{pmatrix}^\top.$$

各行毎に書けば，これは次の三項間漸化式と等価である．

$$(z-\alpha_n)R_{n+1}(z) + (u_n z - v_n)R_n(z) + w_n(z-\beta_n)R_{n-1}(z) = 0, \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$
$$R_{-1}(z) = 0, \quad R_0(z) = \text{const.}$$

漸化式より，$R_n(z)$ は分子と分母が共に n 次多項式である有理関数となることがわかる：

$$R_n(z) = \frac{P_n(z)}{\prod_{i=0}^{n-1}(z-\alpha_i)}.$$

ここで，$P_n(z)$ は次の三項間漸化式を満たすものである．

$$\begin{aligned} P_{n+1}(z) + (u_n z - v_n)P_n(z) + w_n(z-\alpha_{n-1})(z-\beta_n)P_{n-1}(z) = 0, \quad n = 0,1,2,\ldots, \\ P_{-1}(z) = 0, \quad P_0(z) = R_0(z). \end{aligned} \tag{3.20}$$

$R_n(z)$ を R_{II} 有理関数 (R_{II} rational functions)，$P_n(z)$ を R_{II} 多項式 (R_{II} polynomials) という．

以下では次の仮定を置く．

$$w_n \neq 0, \quad P_n(\alpha_{n-1}) \neq 0, \quad n = 1,2,3,\ldots.$$

このとき，次の Favard 型の定理の成立を示すことができる [38].

定理 3.6 R_{II} 多項式 $P_n(z)$ が三項間漸化式 (3.20) で定義されているとき，$\prod_{i=0}^{k-1}(z-\alpha_i)^{-1}\prod_{j=1}^{l}(z-\beta_j)^{-1}$, $k,l = 0,1,2,\ldots,$ を基底とする線型空間を定義域とする線型汎関数 $\mathcal{L}$ で，次の直交関係式を満たすものが存在する．

$$\mathcal{L}\left[\frac{z^m P_n(z)}{\prod_{i=0}^{n-1}(z-\alpha_i)\prod_{j=1}^{n}(z-\beta_j)}\right] = \mathcal{L}\left[R_n(z)\frac{z^m}{\prod_{j=1}^{n}(z-\beta_j)}\right] = h_n\delta_{m,n}, \tag{3.21}$$
$$h_n \neq 0, \quad m = 0,1,\ldots,n.$$

この $\mathcal{L}$ は，h_0, h_1 の値の任意性を除いて一意に定まる．

線型汎関数 $\mathcal{L}$ に対して，そのモーメントを

$$c_{k,l} = \mathcal{L}\left[\frac{1}{\prod_{i=0}^{k-1}(z-\alpha_i)\prod_{j=1}^{l}(z-\beta_j)}\right]$$

で定める．このとき，$R_n(z)$ は次の行列式表示を持つ [91]：

$$R_n(z) = \frac{\kappa_n}{f_n^{1,1}}\begin{vmatrix} 1 & c_{0,1} & c_{0,2} & \cdots & c_{0,n} \\ (z-\alpha_0)^{-1} & c_{1,1} & c_{1,2} & \cdots & c_{1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \prod_{i=0}^{n-1}(z-\alpha_i)^{-1} & c_{n,1} & c_{n,2} & \cdots & c_{n,n} \end{vmatrix}.$$

ただし，κ_n は $P_n(z)$ の最高次係数，$f_n^{k,l} = |c_{k+i,l+j}|_{0\le i,j\le n-1}$．これが直交関係式 (3.21) を満たすことは,

$$\frac{z^m}{\prod_{j=1}^{n}(z-\beta_j)} = \frac{1}{\prod_{j=1}^{n-m}(z-\beta_j)} + \sum_{k=1}^{m}\frac{\xi_k}{\prod_{j=1}^{n-m+k}(z-\beta_j)}, \quad m = 0,1,\ldots,n,$$

を満たす定数 $\xi_k, k=1,2,\ldots,m,$ が存在することからわかる．

R_{II} 多項式に対して，スペクトル変換と離散時間 $s\in\mathbb{N}_0$ を次のように導入することができる [90].

$$A_n^{(s)}(z-\lambda^{(s)})P_n^{(s+1)}(z)=P_{n+1}^{(s)}(z)+B_n^{(s)}(z-\alpha_n^{(s)})P_n^{(s)}(z). \tag{3.22}$$

ただし，

$$B_n^{(s)}=-(\lambda^{(s)}-\alpha_n^{(s)})^{-1}\frac{P_{n+1}^{(s)}(\lambda^{(s)})}{P_n^{(s)}(\lambda^{(s)})}.$$

このとき，線型汎関数の時間発展も

$$\mathcal{L}^{(s+1)}[f(z)]=\mathcal{L}^{(s)}\left[\frac{z-\lambda^{(s)}}{z-\alpha_0^{(s)}}f(z)\right]$$

と導入され，$P_n^{(s+1)}(z)$ は $\mathcal{L}^{(s+1)}$ に関して直交関係式 (3.21) を満たす．また，逆変換も

$$C_n^{(s)}P_n^{(s)}(z)=P_n^{(s+1)}(z)+D_n^{(s)}(z-\beta_n^{(s)})P_{n-1}^{(s+1)}(z) \tag{3.23}$$

で導入できる．(3.22) と (3.23) の両立条件として，次の離散可積分系が得られる：

$$B_n^{(s+1)}+D_n^{(s+1)}\frac{A_n^{(s+1)}}{A_{n-1}^{(s+1)}}-A_n^{(s+1)}C_n^{(s+1)}=B_n^{(s)}\frac{C_{n+1}^{(s)}}{C_n^{(s)}}+D_{n+1}^{(s)}-A_n^{(s)}C_{n+1}^{(s)}, \tag{3.24}$$

$$\begin{aligned}&\alpha_n^{(s+1)}B_n^{(s+1)}+\beta_n^{(s+1)}D_n^{(s+1)}\frac{A_n^{(s+1)}}{A_{n-1}^{(s+1)}}-\lambda^{(s+1)}A_n^{(s+1)}C_n^{(s+1)}\\&\qquad=\alpha_n^{(s)}B_n^{(s)}\frac{C_{n+1}^{(s)}}{C_n^{(s)}}+\beta_{n+1}^{(s)}D_{n+1}^{(s)}-\lambda^{(s)}A_n^{(s)}C_{n+1}^{(s)},\end{aligned} \tag{3.25}$$

$$B_{n-1}^{(s+1)}D_n^{(s+1)}\frac{A_n^{(s+1)}}{A_{n-1}^{(s+1)}}=B_n^{(s)}D_n^{(s)}\frac{C_{n+1}^{(s)}}{C_n^{(s)}}, \tag{3.26}$$

および，パラメータ $\alpha_n^{(s)},\beta_n^{(s)}$ の時間発展は

$$\alpha_{n-1}^{(s+1)}=\alpha_n^{(s)},\quad \beta_n^{(s+1)}=\beta_n^{(s)},$$

もしくは

$$\alpha_{n-1}^{(s+1)}=\beta_n^{(s)},\quad \beta_n^{(s+1)}=\alpha_n^{(s)},$$

のいずれかである．これを R_{II} 格子 (R_{II} chain) という．R_{II} 格子には従属変数が $A_n^{(s)}, B_n^{(s)}, C_n^{(s)}, D_n^{(s)}$ と 4 つあり，一方で時間発展式は (3.24)–(3.26) の 3 本しかないため，このままでは時間発展が決まらない．これは R_{II} 多項式の時間発展においてなんらかの制約を課すことで，従属変数の間にも制約条件が入り，時間発展を定められるようになる．文献 [65] では $P_n^{(s+1)}(\alpha_n^{(s)})=P_{n+1}^{(s)}(\alpha_n^{(s)})$，つまり $A_n^{(s)}=(\alpha_n^{(s)}-\lambda^{(s)})^{-1}$ という条件を課した場合の行列

式解について議論している．また，R_{II} 多項式がモニックであるという制約を課すこともでき，この場合は 2 つの従属変数に関する 2 本の式で書くことができる [56].

本稿では紙数の都合上詳しく述べないが，R_{II} 多項式についても対称な場合を考えることができ，関連する離散可積分系として FST (Frobenius-Stickelberger-Thiele) 格子がある．詳細は [87] を参照.

3.5 多重直交多項式

直交多項式は先に述べたように，通常一つの線型汎関数 $\mathcal{L}$ に対して直交性を有する多項式である．対して多重直交多項式 (multiple orthogonal polynomials) とは，$\vec{n} = (n_1, \ldots, n_r)$ を添字に持つ多項式 $P_{\vec{n}}(x)$ であり，異なる r 個の線型汎関数 $\mathcal{L}_1, \ldots, \mathcal{L}_r$ に対して直交性を有する多項式として定義される [6, 72]．多重直交多項式には type I，type II と二通りのタイプが存在することが知られているが，ここではいわゆる type II の多重直交多項式

$$\begin{aligned} &\mathcal{L}_i[x^k P_{\vec{n}}(x)] = 0, \quad k = 0, \ldots, n_i - 1, \quad i = 1, \ldots, r, \\ &\deg(P_{\vec{n}}(x)) = |\vec{n}| = n_1 + \cdots + n_r \end{aligned}$$

を扱う．多重直交多項式は元々は同時 Padé 近似の理論から導入された多項式であり [5]，近年ではランダム行列の理論でも応用が盛んに行われている [10, 53]．直交多項式を特徴づける性質としていわゆる三項間漸化式 (2.3) が知られているが，多重直交多項式にも同様の関係式が成り立つことが知られている [37, 107].

命題 3.7 多重直交多項式 $\{P_{\vec{n}}(x)\}$ は，次の r 本の最隣接関係式を満足する:

$$xP_{\vec{n}}(x) = P_{\vec{n}+\vec{e}_i}(x) + a_{\vec{n},i}P_{\vec{n}}(x) + \sum_{k=1}^{r} b_{\vec{n},k}P_{\vec{n}-\vec{e}_k}(x), \quad i = 1, \ldots, r. \tag{3.27}$$

ここで，$\{\vec{e}_i\}$ は単位ベクトルを表す.

定義式や最隣接漸化式から明らかなように，$r = 1$ の場合は直交多項式に帰着される．一方で，この多重直交多項式は d-直交多項式 [57] と呼ばれる，$d + 2$ 項間漸化式により定義される多項式列

$$xp_n(x) = p_{n+1}(x) + \sum_{k=0}^{d} a_{n,k}p_{n-k}(x)$$

も特別な場合として含むことが知られている．$d = 1$ の場合は当然通常の直交多項式であり，d-直交多項式もまた直交多項式の一種の拡張となっている．従って，多重直交多項式は直交多項式および d-直交多項式を含む幅広いクラスの直交関数系と見なすことができる.

ではこれより多重直交多項式に対応する可積分系を紹介する．ここでは特に，連続の場合を紹介する．直交多項式の場合の議論を参考にして，多重直交多項式のスペクトル変換を構成することが可能である.

定理 3.8 $f(x)$ を t に依存しない関数として，線型汎関数 $\mathcal{L}_1,\ldots,\mathcal{L}_r$ に対して 1 パラメーター変形

$$\frac{d}{dt}\mathcal{L}_i[f(x)] = \mathcal{L}_i[xf(x)], \quad i = 1,\ldots,r$$

を導入する．すると，対応する多重直交多項式 $\{P_{\vec{n}}(x)\}$ の時間変化は最隣接漸化式 (3.27) の係数を用いて

$$\frac{d}{dt}P_{\vec{n}}(x) = -\sum_{k=1}^{n} b_{\vec{n},k}P_{\vec{n}-\vec{e}_k}(x) \tag{3.28}$$

と書ける．

スペクトル変換 (3.28) と最隣接漸化式 (3.27) との両立条件より，

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}a_{\vec{n},i} &= \sum_{k=1}^{r}(b_{\vec{n}+\vec{e}_i,k} - b_{\vec{n},k}),\\
\frac{d}{dt}b_{\vec{n},i} &= b_{\vec{n},i}(a_{\vec{n},i} - a_{\vec{n}-\vec{e}_i}, i), \quad i = 1,\ldots,r
\end{aligned}$$

が導かれる．ただし，この方程式の大きな特徴として，初期値を自由に選ぶことが出来ず，初期値は次の差分方程式 [107]

$$\begin{aligned}
&a_{\vec{n}+\vec{e}_i,j} - a_{\vec{n},j} = a_{\vec{n}+\vec{e}_j,i} - a_{\vec{n},i},\\
&\sum_{k=1}^{r}(b_{\vec{n}+\vec{e}_j,k} - b_{\vec{n}+\vec{e}_i,k}) = \begin{vmatrix} a_{\vec{n}+\vec{e}_j,i} & a_{\vec{n},i} \\ a_{\vec{n}+\vec{e}_i,j} & a_{\vec{n},j} \end{vmatrix},\\
&\frac{b_{\vec{n},i}}{b_{\vec{n}+\vec{e}_j,i}} = \frac{a_{\vec{n}-\vec{e}_i,j} - a_{\vec{n}-\vec{e}_i,j}}{a_{\vec{n},j} - a_{\vec{n},i}}
\end{aligned} \tag{3.29}$$

を満足するように選ぶ必要がある．$r = 1$ の場合この方程式は通常の戸田方程式に帰着される．一方で多重直交多項式は d-直交多項式を特別な場合として含んでいることを思い出すと，方程式 (3.29) から，d-直交多項式に対応する可積分系も自然に得られる．実際，例えば $r = 2$ の場合，ミウラ型変換

$$\begin{aligned}
\alpha_{2n} &= a_{(n,n),1}, \quad \alpha_{2n+1} = a_{(n+1,n),2},\\
\beta_{2n} &= b_{(n,n),1} + b_{(n,n),2}, \quad \beta_{2n+1} = b_{(n+1,n),1} + b_{(n+1,n),2},\\
\gamma_{2n} &= b_{(n,n),1}(a_{(n-1,n-1),1} - a_{(n-1,n-1),2}),\\
\gamma_{2n+1} &= b_{(n+1,n),2}(a_{(n,n-1),1} - a_{(n,n-1),2})
\end{aligned}$$

が存在して，この変換により式 (3.29) から full-Kostant 戸田方程式の特別な場合

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\alpha_n &= \beta_{n+1} - \beta_n,\\
\frac{d}{dt}\beta_n &= \beta_n(\alpha_n - \alpha_{n-1}) + \gamma_{n+1} - \gamma_n,\\
\frac{d}{dt}\gamma_n &= \gamma_n(\alpha_n - \alpha_{n-2})
\end{aligned}$$

が得られる．ここでは，連続時間の場合について述べたが，同様の過程を経ることで離散の場合についても議論が可能となる [59].

4. 最近の話題

直交多項式と可積分系の両方の理論が活躍する場面は非常に多く，分野も多岐にわたる．以下では，最近の話題の中からそのような事例をいくつか取り上げ紹介する．

4.1 数値計算

数値計算への応用として，まず Padé 補間（近似）への応用が挙げられる [7]．本節では別の応用として行列の固有値計算への応用を取り上げる．

2.2 節で述べたように，直交多項式の漸化式は三重対角行列（Jacobi 行列）の固有値問題によって与えられるのであった．ここでは特に直交多項式の系列が有限次で打ち切られている場合を考える．すなわち，N をある正の整数として

$$J\boldsymbol{p} = x\boldsymbol{p},$$

$$J = \begin{pmatrix} b_0 & 1 & & & \\ u_1 & b_1 & 1 & & \\ & u_2 & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & u_{N-1} & b_{N-1} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} p_0(x) & p_1(x) & \dots & p_{N-1}(x) \end{pmatrix}^\top.$$

直交多項式の Christoffel 変換と Geronimus 変換 (2.8) は行列 J の LU 分解を与えていた．その両立条件である非自励離散戸田方程式の行列表示を，非自励パラメータ $\lambda^{(s)}$ を時刻 s 毎に変えることにして，

$$L^{(s+1)}U^{(s+1)} = U^{(s)}L^{(s)} - (\lambda^{(s+1)} - \lambda^{(s)})E$$

と書き直してみよう．すると，非自励離散戸田格子の時間発展方程式の 1 ステップは，$J^{(s)}$ を LU 分解した後に 2 つの行列を入れ替えた積を作り，さらにある量 $\lambda^{(s+1)} - \lambda^{(s)}$ を対角成分から一斉に引く（原点シフト，shift of origin）という操作により実現されている，と見ることができる．この時間発展を漸化式 (2.7) によって計算する方法は，Rutishauser による **qds** アルゴリズム (quotient difference algorithm with shifts) として知られており，これを用いて三重対角行列の固有値計算を行うことができる [33, 80]．また，その改良版である **dqds** アルゴリズム (differential qd algorithm with shifts) [21] は高速・高精度なアルゴリズムとして知られており，正定値対称行列の固有値，もしくは行列の特異値を求めるために，実際に線形計算のための有名ソフトウェアである LAPACK などで用いられるアルゴリズムの一つとなっている．さらに，近年は離散可積分系発のアルゴリズムとして，mdLVs アルゴリズム (modified discrete Lotka-Volterra algorithm with shifts) [71, 104] や離

散ハングリー Lotka-Volterra 方程式を用いたアルゴリズム [24] などが種々の行列の固有値・特異値を計算するアルゴリズムとして提案されてきている．

4.2 実験計画法

実験計画法における optimal design とは，実験（観測）を行うたびに誤差が加わった結果が返ってくるような対象に対して，限られた実験回数で最も精度よく回帰分析を行うことができるようなデータが得られる実験法（観測点の集合）のことである．以下では，線形回帰モデル Y で対象を推定することを考える．

$$Y(x) = \boldsymbol{\theta}^\top \boldsymbol{f}(x) + \epsilon, \quad E[\epsilon] = 0, \quad V[\epsilon] = \sigma^2 > 0. \tag{4.1}$$

ここで，x は観測点，$\boldsymbol{f}(x) = (f_0(x), f_1(x), \ldots, f_{m-1}(x))^\top$ は既知関数，$\boldsymbol{\theta} = (\theta_0, \theta_1, \ldots, \theta_{m-1})^\top$ が推定したい未知係数，および確率変数 ϵ は実験ごとに独立な誤差項である．実験可能な点の集合を $[0, 1]$，実験回数を n 回とするとき，n 個の観測点 $x_1, x_2, \ldots, x_n \in [0, 1]$ と確率測度 μ を

$$\mu(\{x\}) = \frac{\#\{k \mid x_k = x\}}{n}$$

で関係づける．$[0, 1]$ 上の確率測度の全体を $\mathcal{P}_{[0,1]}$ とするとき，問題は最も精度よく未知係数 $\boldsymbol{\theta}$ を推定できる最適な $\mu \in \mathcal{P}_{[0,1]}$ （と対応する観測点の集合 $x_1, x_2, \ldots, x_n$）を求めることである．ここで，一口に「最適な」と言ってもその最適性の規準は明らかではなく，様々なものが提案されている．本稿で取り上げるのは，***D*-optimal design** と呼ばれる規準であり，Fisher 情報行列

$$M_{\boldsymbol{f}}(\mu) = \int_0^1 \boldsymbol{f}(x)\boldsymbol{f}(x)^\top d\mu(x)$$

の行列式を最大化する $\mu \in \mathcal{P}_{[0,1]}$ を最適とするものである [50]．これは，推定量の $(1-\alpha)$-信頼楕円の体積を最小化することに相当している．最適化問題の形で書けば，

$$\text{maximize } \det M_{\boldsymbol{f}}(\mu) \quad \text{subject to } \mu \in \mathcal{P}_{[0,1]}$$

となる．

線形回帰モデル (4.1) の既知関数 $\boldsymbol{f}(x)$ を多項式とした場合，すなわち $\boldsymbol{f}(x) = (1, x, \ldots, x^{m-1})^\top$ のときを多項式回帰モデルという．確率測度 μ のモーメントを $c_k = \int_0^1 x^k d\mu(x)$ とするとき，多項式回帰モデルに対する Fisher 情報行列の行列式は Hankel 行列式 $H_m(\mu) = |c_{i+j}|_{0 \le i,j \le m-1}$ となり，*D*-optimal design は

$$\text{maximize } H_m(\mu) \quad \text{subject to } \mu \in \mathcal{P}_{[0,1]}$$

の最適解で与えられる．この問題を解く上で，実行可能領域 $\mathcal{P}_{[0,1]}$ がモーメント c_k で書くと複雑になることが障害となる．そこで用いられるのがカノニカルモーメント (canonical moment) である [92]．

$\mu \in \mathcal{P}_{[0,1]}$ に対して，

$$c_k^+ = \max_{\sigma \in \mathcal{P}_{[0,1]}} \{c_k(\sigma) \mid c_j(\sigma) = c_j(\mu), j = 0, 1, \dots, k-1\},$$
$$c_k^- = \min_{\sigma \in \mathcal{P}_{[0,1]}} \{c_k(\sigma) \mid c_j(\sigma) = c_j(\mu), j = 0, 1, \dots, k-1\}$$

と定める．このとき，μ の k 次のカノニカルモーメントは

$$p_k = \frac{c_k - c_k^-}{c_k^+ - c_k^-} \in [0, 1]$$

で定義される．カノニカルモーメント p_k は，モーメント c_k の Hankel 行列式の比（離散 Lotka-Volterra 方程式の行列式解と類似のもの）で表されることが示される [17].

このカノニカルモーメントの Hankel 行列式表示に着目し，点 $x = \lambda$ での Y の平均 $E[Y(\lambda)] = \boldsymbol{\theta}^\top \boldsymbol{f}(\lambda)$ が既知のとき，目的関数の Hankel 行列式をカノニカルモーメントを用いて表し，D-optimal design を求めるアルゴリズムが提案されている [83, 85]．このアルゴリズムではカノニカルモーメントを変数変換して得られるある量の満たす関係式として非自励離散戸田方程式が用いられており，事前情報の与えられた点である λ が非自励離散戸田方程式の非自励パラメータとして現れる．また，既知関数 $\boldsymbol{f}(x)$ として三角関数を選んだ場合である三角回帰モデルの事前情報がある場合についても，三角カノニカルモーメントを用いて D-optimal design を求めるアルゴリズムが提案されている [84]．この場合，三角カノニカルモーメントは Toeplitz 行列式の比で表され，その間の関係式として離散 modified KdV 方程式が用いられている．このようにして，多項式回帰モデルと三角回帰モデルはそれぞれ直交多項式（2 節），Szegő 多項式（3.1 節）と関係づけられる．

4.3　ランダム行列

ランダム行列理論とは，その名のとおり成分が（ある分布に従って）ランダムな行列の固有値分布・相関に関する理論であり，Fisher・Wishart [22, 111] の数理統計学に端を発して，Wigner [109, 110] により核物理学の分野で発展してきた分野である．ランダム行列の理論では，実固有値を持つような場合，すなわち実対称・Hermite・四元数自己双対行列が考えられている（近年は複素固有値を持つような場合にも議論がなされている [46]）．ランダム行列の相関関数等といった量は実は直交多項式（2 節）・歪直交多項式（3.2 節）により計算が簡単に行えることが知られている．ここでは，簡単な事実だけ紹介したい（詳しくは例えば [58, 68] を参照のこと）．N 次 Hermite 行列で成分が Gauss 分布に従うような，Gauss 型ユニタリアンサンブルを考える．全固有値 $x_1, \dots, x_N$ の分布関数は

$$p(x_1, \dots, x_N) dx_1 \dots dx_N = \prod_{j=1}^{N} e^{-x_j^2} \prod_{j<l} |x_j - x_l|^2 dx_1 \dots dx_N,$$

固有値の相関関数は

$$\rho(x_1,\dots,x_k)=c_N^{-1}\frac{N!}{(N-k)!}\int_{-\infty}^{\infty}dx_{k+1}\dots\int dx_N p(x_1,x_2,\dots,x_N)$$

で与えられる．ここで，c_N は規格化定数．今，$C_j(x)$ を j 次の任意なモニック多項式として，Vandermonde の行列式

$$\prod_{j<l}(x_j-x_l)=\det(x_l^{j-1})_{j,l=1,\dots,N}=\det(C_{j-1}(x_l))_{j,l=1,\dots,N}$$

を思い出すと，相関関数は適当な変換により任意定数 $h_1,\dots,h_N$ を用いて，

$$\begin{aligned}\rho(x_1,\dots,x_k)=&c_N^{-1}\frac{N!}{(N-k)!}\prod_{k=0}^{N-1}h_k\int_{-\infty}^{\infty}dx_{k+1}\dots\int dx_N\\&\cdot\det\left(e^{-x_i^2/2}e^{-x_j^2/2}\sum_{k=0}^{N-1}\frac{C_k(x_i)C_k(x_j)}{h_k}\right)_{i,j=1,\dots,N}\end{aligned}$$

で与えられる．従って，この場合 Hermite 多項式

$$H_j(x)=e^{x^2}\left(-\frac{d}{dx}\right)^j e^{-x^2}$$

を用いて，

$$C_j(x)=\frac{H_j(x)}{2^j},\quad h_j=\frac{j!\sqrt{\pi}}{2^j}$$

と選ぶことで，Hermite 多項式の直交性から相関関数の計算が容易に実行可能となる．一般に，ユニタリアンサンブルにおける相関関数は直交多項式による表示を持つが，直交・シンプレクティックアンサンブルの場合は通常，歪直交多項式による表示を持つことが知られている．また，可積分系との興味深い関連として，固有値の相関関数で用いられる行列積分そのものが KP ないしは結合型 KP 方程式のタウ関数と一致することが指摘されている [43,66].

4.4 ASEP

ASEP とは非対称単純排他過程 (Asymmetric Simple Exclusion Process) と呼ばれる非平衡統計力学モデルの 1 種であり，1 次元格子上を多数の粒子が体積排除の相互作用の下で拡散をするような模型である．ここでは有限格子上での連続時間 ASEP について紹介する．格子点 L の有限 1 次元格子上に適当に粒子が配置されているとしよう．この時，各サイト j に粒子がいる場合は $\tau_j=1$，いない場合は $\tau_j=0$ と表す．ここで，粒子は次のルールに従ってランダムウォークを行っているものとする：

- 粒子は右へ 1，左へ q $(0\le q<1)$ の割合でホップする．

- 粒子は最隣接サイトにのみホップ可能.
- ある粒子が右（左）へホップする際，右（左）隣のサイトに粒子が存在する場合，そのホッピングは起こらない.

また，さらにここでは開放的境界条件，すなわち格子の端点で粒子の出入が行われる場合も考える（それぞれ，出入率を $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ とする）. 以上のルールをまとめると，Fig. 1 のようになる. このようなモデルはシンプルではあるが様々な現象を記述しており，例えば交通流や界面成長を記述するモデルとして用いられる [82]. また，近年ではランダム行列の理論（4.3 節）との関連も様々なところから指摘されている [39, 69].

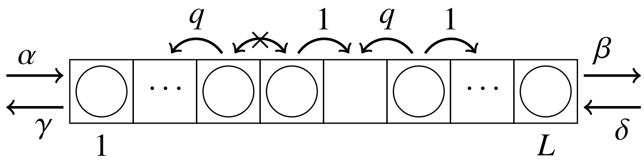

Fig. 1.　The conceptual diagram of ASEP

ASEP の大きな特徴としては，厳密解が色々と求まるということがある. 特に，定常状態において系の粒子配位が $\tau_1 \ldots \tau_L$ で与えられる確率 $P(\tau_1, \ldots, \tau_L)$ は行列積を用いた方法により与えられることが知られている [11, 16]：

$$P(\tau_1, \ldots, \tau_L) = \frac{1}{Z_L} \langle W| \prod_{j=1}^{L} (\tau_j D + (1-\tau_j)E) |V\rangle .$$

ここで，Z_L は分配関数

$$Z_L = \langle W| (D+E)^L |V\rangle$$

であり，D, E は正方行列，$\langle W|, |V\rangle$ はベクトルであり以下の関係式に従う：

$$\begin{aligned} DE - qED &= D + E, \\ \langle W| (\alpha E - \gamma D) &= \langle W| , \\ (\beta D - \delta E) |V\rangle &= |V\rangle . \end{aligned}$$

ASEP において，流量等の物理量は分配関数を用いて計算が可能である. すなわち，$D, E, \langle W|, |V\rangle$ の選び方が重要になってくる. 実はこの場合，$D + E$ を Askey-Wilson 多項式 [52] に対応した Jacobi 行列に選ぶことで厳密解が計算できることが知られている [106].

4.5　出生死滅過程

出生死滅過程は Markov 過程の一種であり，生物集団の個体数モデルや待ち行列の理論で広く用いられている [19, 20]. 今，可算無限個の状態 $X_0, X_1, \ldots,$ を考え，時刻 t におい

て状態 X_i から X_j へ遷移する確率を $P_{i,j}(t)$ とする．出生死滅過程においては，$P_{i,j}(t)$ は微小時間 Δ_t に関して次の条件を要請する：

$$\begin{aligned} P_{i,i+1}(\Delta_t) &= \lambda_i \Delta_t + o(\Delta_t), \\ P_{i,i}(\Delta_t) &= 1 - (\lambda_i + \mu_i)\Delta_t + o(\Delta_t), \\ P_{i,i-1}(\Delta_t) &= \mu_i \Delta_t + o(\Delta_t), \\ P_{i,j}(\Delta_t) &= o(\Delta_t), \quad |i-j| > 1. \end{aligned}$$

ここで，Markov 性から導かれる条件 $P_{i,j}(s+t) = \sum_k P_{i,k}(s)P_{k,j}(t)$ を用いることで，差分方程式

$$P_{i,j}(t+\Delta_t) = P_{i,j-1}(t)P_{j-1,j}(\Delta_t) + P_{i,j+1}(t)P_{j+1,j}(\Delta_t) + P_{i,j}(t)P_{j,j}(\Delta_t) + o(\Delta_t)$$

が導かれる．この方程式に対して，$\Delta_t \to 0$ の極限をとることで，Chapman-Kolmogorov 微分方程式

$$\frac{d}{dt}P_{i,j}(t) = \lambda_{j-1}P_{i,j-1}(t) + \mu_{j+1}P_{i,j+1}(t) - (\lambda_j + \mu_j)P_{i,j}(t).$$

が得られる．上式は，$P = (P_{i,j}(t))_{i,j=0,\dots}$ とすると

$$\frac{d}{dt}P = P\begin{pmatrix} -(\lambda_0+\mu_0) & \lambda_0 & & \\ \mu_1 & -(\lambda_1+\mu_1) & \lambda_1 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

と書き直され，ここでもやはり Jacobi 行列が表れる．従って，直交多項式を用いれば厳密に解を書き下すことができる．実際，Jacobi 行列に対応する直交多項式および測度をそれぞれ $\{\psi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}, \rho(x)$ とすると，

$$P_{i,j}(t) = \left(\frac{\pi_j}{\pi_i}\right)^{1/2} \int e^{-xt}\psi_i(x)\psi_j(x)d\rho(x), \quad \pi_i = \frac{\lambda_0 \dots \lambda_{i-1}}{\mu_1 \dots \mu_i}$$

と厳密解が構成される [47]．近年においても，可解な出生死滅過程と直交多項式との関連性が指摘されている [81]．

4.6 量子状態転送

量子状態をある場所から別の場所へと転送することは，量子情報通信の分野では非常に重要な問題である [9,12]．特に，そのような量子状態転送が確率 1 で実現できる場合，その転送は理想的であると考えられる．これを完全状態移行 (Perfect State Trasfer) という．完全状態移行は理論的に観測されており，例えば *XX* スピン鎖において観測されることが知られている [4,13,48]．*XX* スピン鎖における量子状態転送の観測には直交多項式の理論が重要な役割を果たしており [14,108]，以下では *XX* スピン鎖と直交多項式の関係について紹介する．

サイト数を $N+1$ として，最隣接作用を持つ XX 型のハミルトニアン

$$H = \frac{1}{2}\sum_{l=0}^{N-1} J_{l+1}(\sigma_l^x\sigma_{l+1}^x + \sigma_l^y\sigma_{l+1}^y) + \frac{1}{2}\sum_{l=0}^{N} B_l(\sigma_l^z + 1)$$

について考える．但し，$J_{N+1} = 0$ であり，$\sigma^x, \sigma^y, \sigma^z$ は添字のサイトのキュービット状態 $|0\rangle, |1\rangle$ にのみ作用する Pauli 行列である：

$$\begin{aligned} \sigma^x|0\rangle &= |1\rangle, \quad \sigma^y|0\rangle = -i|1\rangle, \quad \sigma^z|0\rangle = -|0\rangle, \\ \sigma^x|1\rangle &= |0\rangle, \quad \sigma^y|1\rangle = i|0\rangle, \quad \sigma^z|1\rangle = |1\rangle. \end{aligned}$$

ハミルトニアン H は関係式

$$\left[H, \sum_{l=0}^{N}\sigma_l^z\right] = 0$$

を満たし，スピンの総量が保存されることが容易に確認できる．実際，1 励起基底 $|e_n)$ に対し，ハミルトニアンの作用は

$$H|e_n) = J_{n+1}|e_{n+1}) + B_n|e_n) + J_n|e_n)$$

と記述される．すなわち，1 励起基底が張る部分空間においては H はいわゆる対称な Jacobi 行列

$$\begin{pmatrix} B_0 & J_1 & & & \\ J_1 & B_1 & J_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & J_{N-1} & B_{N-1} & J_N \\ & & & J_N & B_N \end{pmatrix}$$

と同一視できる．すなわち，ハミルトニアン H は対応する（有限次元の）直交多項式により対角化されることがわかる．これにより，種々の物理量を計算することが可能となり，系の詳細な解析が直交多項式の理論から可能となる．例えば，係数 B_l, J_l を Krawtchouk 多項式 [52] の特別な場合

$$B_l = 0, \quad J_l = \frac{\sqrt{l(N+1-l)}}{2}$$

と選んだ場合，以下のように完全状態移行が確認される：

$$(e_0|\exp(-iTH)|e_i) = \delta_{i,N}, \quad \exists T \in \mathbb{R}.$$

またここで述べた話は 1 次元の場合であるが，これまでの事実は高次元の場合にも拡張でき，完全状態移行の拡張概念が多変数 Krwatchouk 多項式 [27, 28, 34] の理論を用いて確認されている [62].

4.7 Painlevé 方程式

Painlevé 方程式とは，特別なものを除き，動く特異点をもたない非線形常微分方程式として見出された 6 種類の微分方程式をさす [76]．最近では，その離散類似およびその一般化も含め，取り扱われることが多い [73]．Painlevé 方程式の解は一般に超越的であるが，その特殊解として超幾何関数などの特殊関数や直交多項式があらわれることがよく知られている．

Painlevé 方程式と直交多項式は，2.5 節で取り上げた古典直交多項式にあらわれる重み関数に変形パラメータを導入することで関連付けることができる．この種の重み関数に付随した直交多項式は準古典直交多項式と呼ばれる．例えば，Hermite 多項式の重み関数である Gauss 関数に高次項を付加した

$$w(x;t) = \exp\left(-tx^2 - \frac{1}{4}x^4\right)$$

を導入する．この重み関数のもとで線型汎関数を

$$\mathcal{L}[f(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)w(x;t)dx$$

と定義すると，奇数次のモーメントはゼロであり，対応する直交多項式として対称な直交多項式が得られる．この対称な直交多項式のみたす三項間漸化式 (2.11) に現れる係数 $v_n(t)$ が，重み関数のパラメータ t に関する微分方程式として Painlevé IV 型方程式

$$2v_n v_n'' = (v_n')^2 + 3v_n^4 + 8tv_n^3 + (4t^2 + 2n)v_n^2 - n^2,$$

離散変数 n については離散 Painlevé I 型方程式 [23]

$$v_n(v_{n-1} + v_n + v_{n+1}) + 2tv_n = n$$

を満足することが，直交多項式と上記の線型汎関数の定義から直ちに示される．

同様に，単位円周上の直交多項式を用いることで離散 Painlevé II 型方程式の解を構成できることなど，q-差分や楕円差分の場合も含め，様々な例が知られている [41, 74, 78].

4.8 超離散系

離散可積分系の研究者の間でここ 20 年ほど注目を集めている対象が超離散系 (ultradiscrete system) である．離散方程式に対して，ある変数変換と極限操作を行うことにより，max-plus 代数と呼ばれるもので記述される区分線形な方程式を得る方法が提案されており，従属変数の初期値を整数に制限すれば以後の時間発展でも従属変数の値が整数となることから，この手法は超離散化 (ultradiscretization) と呼ばれている [98]．離散可積分系に

対して超離散化を適用した場合，その離散可積分系の持つ「よい」性質は行き先の超離散系でも保たれることが経験的に知られている．典型的な例が離散 KdV 方程式の超離散化により得られる箱玉系 (box-ball system; BBS) [96, 97] であり，その時間発展方程式は次で与えられる．

$$U_n^{(t+1)} = \min\left(1 - U_n^{(t)}, \sum_{j=-\infty}^{n-1} (U_j^{(t)} - U_j^{(t+1)})\right), \quad n, t \in \mathbb{Z}.$$

特に箱玉系の場合，従属変数の初期値 $U_n^{(0)}$ を $\{0, 1\}$ に制限すれば，以後の時間発展においても $U_n^{(t)} \in \{0, 1\}$ となり，1 を玉，0 を空き箱とみなせば，時間発展で玉のかたまりがソリトンのように走る様子が観察される．

一方，次の有限格子上の超離散戸田方程式も箱玉系の時間発展を記述することが示されている [67].

$$Q_n^{(t+1)} = \min\left(E_{n+1}^{(t)}, \sum_{j=0}^{n} Q_j^{(t)} - \sum_{j=0}^{n-1} Q_j^{(t+1)}\right), \quad E_n^{(t+1)} = E_n^{(t)} - Q_{n-1}^{(t+1)} + Q_n^{(t)},$$
$$E_0^{(t)} = E_N^{(t)} = +\infty.$$

ここで，$Q_n^{(t)}$ は玉のかたまりの大きさ，$E_n^{(t)}$ はそれらの間の距離を表す変数である．超離散戸田方程式は離散戸田方程式（(2.7) の $\lambda^{(s)} \equiv 0$ の場合）の超離散化により得られる方程式であり，その解も離散戸田方程式の Hankel 行列式解の超離散化により得ることができる．また，非自励離散戸田方程式 (2.7) に対してもその超離散化を考えることができ [54, 55]，運搬車付き箱玉系 (BBS with a carrier) [95] と呼ばれる箱玉系の拡張系の一つと対応することがわかっている．この場合の解も，直交多項式の理論から得られる Hankel 行列式解を超離散化することで与えることができる．

5. おわりに

本論文では直交多項式とその一般化，およびそれらと可積分系との関係について紹介し，これらの理論が様々な応用分野において有用であることを見てきた．紙数の都合上述べることができなかったが，この他に最近の話題として，例外型直交多項式と呼ばれるクラスの多項式による超可積分なポテンシャルの構成 [79] や，Cauchy 双直交多項式，準直交多項式なるクラスの多項式と対応する可積分系の話題 [61]，鏡映演算子を含む Dunkl 型シフト演算子の固有関数である Bannai-Ito 多項式とその特殊化に関する話題 [105] などが挙げられる．直交多項式と可積分系に関する研究は現在も進展を続けている．本論文を通じてこれらの分野に興味を持っていただければ幸いである．

謝辞 本論文の作成にあたり，日頃から貴重な助言を頂きました京都大学大学院情報学研究科の中村佳正教授に感謝いたします．また，本論文の執筆を勧めて下さった龍谷大

学理工学部の松木平淳太教授に感謝いたします．本研究の一部は JSPS 科研費 22540224, 10J03343, 11J04105 の助成を受けたものです．また，本研究の一部は，総合科学技術会議により制度設計された最先端研究開発支援プログラム（FIRST 合原最先端数理モデルプロジェクト）により，日本学術振興会を通して助成されたものです．

参考文献

[1] M. Adler, E. Horozov and P. van Moerbeke, *The Pfaff lattice and skew-orthogonal polynomials*, Int. Math. Res. Not. **1999** (1999), 569–588.

[2] M. Adler and P. van Moerbeke, *String-orthogonal polynomials, string equations, and 2-Toda symmetries*, Comm. Pure Appl. Math. **50** (1997), 241–290.

[3] M. Adler and P. van Moerbeke, *Toda versus Pfaff lattice and related polynomials*, Duke. Math. J. **112** (2002), 1–58.

[4] C. Albanese, M. Christandl, N. Datta and A. Ekert, *Mirror inversion of quantum states in linear registers*, Phys. Rev. Lett. **93** (2004), 230502.

[5] A. Angelesco, *Sur l'approximation simultanée de plusieurs intégrales définies*, C. R. Paris **167** (1918), 629–631.

[6] A. I. Aptekarev, *Multiple orthogonal polynomials*, J. Comput. Appl. Math. **99** (1998), 423–447.

[7] G. A. Baker, Jr. and P. Graves-Morris, *Padé approximants*, 2nd ed., Cambridge University Press, Cambridge, 1996.

[8] G. Baxter, *Polynomials defined by a difference system*, J. Math. Anal. Appl. **2** (1961), 223–263.

[9] C. H. Bennett and D. P. DiVincenzo, *Quantum information and computation*, Nature **404** (2000), 247–255.

[10] P. M. Bleher and A. B. J. Kujilaars, *Random matrices with external source and multiple orthogonal polynomials*, Int. Math. Res. Not. **2004** (2004), 109–129.

[11] R. A. Blythe and M. R. Evans, *Nonequilibrium steady states of matrix product form: A solver's guide*, J. Phys. A: Math. Theor. **40** (2007), R333–R441.

[12] S. Bose, *Quantum communication through an unmodulated spin chain*, Phys. Rev. Lett. **91** (2003), 207901.

[13] S. Bose, *Quantum communication through spin chain dynamics: an introductory overview*, Contemp. Phys. **48** (2007), 13–30.

[14] R. Chakrabarti and J. van der Jeugt, *Quantum communication through a spin chain with interaction determined by a jacobi matrix*, J. Phys. A: Math. Theor. **43** (2010), 085302.

[15] T. S. Chihara, *An introduction to orthogonal polynomials*, Gordon and Breach Science Publishers, New York-London-Paris, 1978.

[16] B. Derrida, M. R. Evans, V. Hakim and V. Pasquir, *Exact solution of a 1D asymmetric exclusion model using a matrix formulation*, J. Phys. A: Math. Gen. **26** (1993), 1493–1517.

[17] H. Dette and W. Studden, *The theory of canonical moments with applications in statistics, probability and analysis*, Wiley, New York, 1997.

[18] F. J. Dyson, *A class of matrix ensembles*, J. Phys. Math. **13** (1972), 90–97.

[19] W. Feller, *An introduction to probability theory and its applications, vol. 1*, 3rd ed., John Wiley and Sons, New York-London-Sydney, 1968.

[20] W. Feller, *An introduction to probability theory and its applications, vol. 2*, 2nd ed., John Wiley and Sons, New York-London-Sydney, 1971.

[21] K. V. Fernando and B. N. Parlett, *Accurate singular values and differential qd algorithms*, Numer. Math. **67** (1994), 191–229.

[22] R. A. Fisher, *Frequency distribution of the values of the correlation coefficient in samples from an indefinitely large population*, Biometrika **10** (1915), 507–521.

[23] A. S. Fokas, B. Grammaticos and A. Ramani, *From continuous to discrete Painlevé equations*, J. Math. Anal. Appl. **180** (1993), 342–360.

[24] A. Fukuda, E. Ishiwata, M. Iwasaki and Y. Nakamura, *The discrete hungry Lotka-Volterra system and a new algorithm for computing matrix eigenvalues*, Inverse Problems **25** (2009), 015007.

[25] G. Gasper and M. Rahman, *Basic hypergeometric series*, 2nd ed., Cambridge, 2004.

[26] S. Ghosh, *Generalized Christoffel-Darboux formula for classical skew-orthogonal polynomials*, J. Phys. A: Math. Theor. **41** (2008), 435204.

[27] F. A. Grünbaum and M. Rahman, *On a family of 2-variable orthogonal Krawtchouk polynomials*, SIGMA **6** (2010), 090.

[28] F. A. Grünbaum and M. Rahman, *A system of multivariable Krawtchouk polynomials and a probabilistic application*, SIGMA **7** (2011), 119.

[29] D. P. Gupta and D. R. Masson, *Solutions to the associated q-Askey-Wilson polynomial recurrence relation*, Internat. Ser. Numer. Math. **119** (1994), 273–284.

[30] Y. Hama, A. Fukuda, Y. Yamamoto, M. Iwasaki, E. Ishiwata and Y. Nakamura, *On some properties of a discrete hungry Lotka-Volterra system of multiplicative type*, J. Math-for-Indust. **4** (2012), 5–15.

[31] E. Hendriksen and H. van Rossum, *Orthogonal Laurent polynomials*, Indag. Math. **89** (1986), 17–36.

[32] 広田良吾, 直接法によるソリトンの数理, 岩波書店, 1992.

[33] 広田良吾, 辻本諭, 今井達也, *Difference scheme of soliton equations*, 数理解析研究所講究録, **822** (1993), 144–152.

[34] M. R. Hoare and M. Rahman, *A probabilistic origin for a new class of bivariate polynomials*, SIGMA **4** (2008), 089.

[35] A. Iserles and S. P. Nørsett, *On the theory of biorthogonal polynomials*, Trans. Amer. Math. Soc. **306** (1988), 455–474.

[36] A. Iserles and S. P. Nørsett, *Christoffel-Darboux-type formulae and a recurrence for biorthogonal polynomials*, Constr. Approx. **5** (1989), 437–453.

[37] M. E. H. Ismail, *Classical and quantum orthogonal polynomials in one variable*, Cambridge University Press, 2005.

[38] M. E. H. Ismail and D. R. Masson, *Generalized orthogonality and continued fractions*, J. Approx. Theory **83** (1995), 1–40.

[39] K. Johansson, *Shape fluctuations and random matrices*, Comm. Math. Phys. **209** (2000), 437–476.

[40] W. B. Jones and W. J. Thron, *Survey of continued fraction methods of solving moment problems and related topics*, Analytic Theory of Continued Fractions (W. B. Jones, W. J. Thron and H. Waadeland, eds.), Springer-Verlag, Berlin-New York, 1982, pp. 4–37.

[41] K. Kajiwara, T. Masuda, M. Noumi, Y. Ohta and Y. Yamada, *Hypergeometric solutions to the q-Painlevé equations*, Int. Math. Res. Not. **2004** (2004), 2497–2521.

[42] K. Kajiwara and J. Satsuma, *q-difference version of the two-dimensional Toda lattice equation*, J. Phys. Soc. Japan **60** (1991), 3986–3989.

[43] S. Kakei, *Orthogonal and symplectic matrix integrals and coupled KP hierarchy*, J. Phys. Soc. Japan **68** (1999), 2875–2877.

[44] Y. Kametaka, *Hypergeometric solutions of Toda equation*, 数理解析研究所講究録, **554** (1985), 26–46.

[45] S. Kamioka and S. Tsujimoto, *Discrete dynamical systems arising from symmetric

(p, q)-*orthogonal polynomials*, in preparation.

[46] E. Kanzieper and G. Akemann, *Statistics of real eigenvalues in Ginibre's ensemble of random real matrices*, Phys. Rev. Lett. **95** (2005), 230201.

[47] S. Karlin and J. McGregor, *The differential equations of birth-and-death processes and the Stieltjes moment problems*, Trans. Amer. Math. Soc. **85** (1957), 489–546.

[48] A. Kay, *A review of perfect state transfer and its application as a constructive tool*, Int. J. Quantum Inf. **8** (2010), 641–676.

[49] S. Kharchev, A. Mironov and A. Zhedanov, *Faces of relativistic Toda chain*, Int. J. Mod. Phys. A **12** (1997), 2675–2724.

[50] J. Kiefer, *Optimum experimental designs*, J. Roy. Statist. Soc. Ser. B **21** (1959), 272–319.

[51] D. E. Knuth, *Overlapping Pfaffians*, Electron. J. Combin. **3** (1996), Research Paper 5.

[52] R. Koekoek and R. F. Swarttouw, *The Askey-scheme of hypergeometric orthogonal polynomials and its q-analogue*, Delft University of Technology, Faculty of Information Technology and Systems, Department of Technical Mathematics and Informatics, Report no. 98-17, 1998.

[53] A. Kuijlaars, *Multiple orthogonal polynomials in random matrix theory*, Proceedings of the International Congress of Mathematicians (Hyderabad, India) (R. Bhatia, ed.), **III**, 2010, pp. 1417–1432.

[54] K. Maeda, *A finite Toda representation of the box-ball system with box capacity*, J. Phys. A: Math. Theor. **45** (2012), 085204.

[55] K. Maeda and S. Tsujimoto, *Box-ball systems related to the nonautonomous ultradiscrete Toda equation on the finite lattice*, JSIAM Lett. **2** (2010), 95–98.

[56] 前田一貴, 辻本諭, R_{II} 格子と対応する箱玉系について, 九州大学応用力学研究所研究集会報告, **23AO-S7** (2012), 60–67.

[57] P. Maroni, *L'orthogonalité et les récurrences de polynômes d'ordre supérieur à deux*, Annales de la Faculté des sciences de Toulouse **10** (1989), 105–139.

[58] M. L. Mehta, *Random matrices*, third ed., Elsevier/Academic Press, 2004.

[59] H. Miki, *Multiple orthogonal polynomials and generalized Toda lattice on a multi-line*, in preparation.

[60] H. Miki, H. Goda and S. Tsujimoto, *Discrete spectral transformations of skew orthogonal polynomials and associated discrete integrable systems*, SIGMA **8** (2012), 008.

[61] H. Miki and S. Tsujimoto, *Cauchy biorthogonal polynomials and discrete integrable*

systems, J. Nonlinear Syst. Appl. **2** (2011), 195–199.

[62] H. Miki, S. Tsujimoto, L. Vinet and A. Zhedanov, *Quantum state transfer in a two-dimensional regular spin lattice of triangular shape*, Phys. Rev. A **65** (2012), 062306.

[63] Y. Minesaki and Y. Nakamura, *The discrete relativistic Toda molecule equation and a Padé approximation algorithm*, Numer. Algorithms **27** (2001), 219–235.

[64] A. Mukaihira and Y. Nakamura, *Schur flow for orthogonal polynomials on the unit circle and its integrable discretization*, J. Comput. Appl. Math. **139** (2002), 75–94.

[65] A. Mukaihira and S. Tsujimoto, *Determinant structure of non-autonomous Toda-type integrable systems*, J. Phys. A: Math. Gen. **39** (2006), 779–788.

[66] M. Mulase, *Matrix integrals and integrable systems*, Topology, Geometry and Field Theory (K. Fukaya, M. Furuta, T. Kohno and D. Kotschick, eds.), World Scientific, 1994, pp. 111–127.

[67] A. Nagai, D. Takahashi and T. Tokihiro, *Soliton cellular automaton, Toda molecule equation and sorting algorithm*, Phys. Lett. A **255** (1999), 265–271.

[68] 永尾太郎, ランダム行列の基礎, 東京大学出版会, 2005.

[69] T. Nagao and T. Sasamoto, *Asymmetric simple exclusion process and modified random matrix ensembles*, Nuclear Phys. B **699** (2004), 487–502.

[70] A. Nakamura, *Toda equation and its solutions in special functions*, J. Phys. Soc. Japan **65** (1996), 1589–1597.

[71] 中村佳正, 可積分系の機能数理, 共立出版, 2006.

[72] E. M. Nikishin and V. N. Sorokin, *Rational approximations and orthogonality*, American Mathematical Society, Providence, RI, 1991.

[73] 野海正俊, パンルヴェ方程式 −対称性からの入門−, 朝倉書店, 2000.

[74] M. Noumi, S. Tsujimoto and Y. Yamada, *Padé interpolation for elliptic Painlevé equation*, to appear in the proceedings of the international workshop “Infinite Analysis 11”, arXiv:1204.0294 [math-ph].

[75] K. Okamoto, *Sur les échelles associées aux fonctions spécials et l’équation de Toda*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math. **34** (1987), 709–740.

[76] 岡本和夫, パンルヴェ方程式, 岩波書店, 2009.

[77] V. G. Papageorgioua and F. W. Nijhoff, *On some integrable discrete-time systems associated with the Bogoyavlensky lattices*, Physica A **228** (1996), 172–188.

[78] V. Periwal and D. Shevitz, *Unitary-matrix models as exactly solvable string theories*, Phys. Rev. Lett. **64** (1990), 1326–1329.

[79] S. Post, S. Tsujimoto and L. Vinet, *Families of superintegrable Hamiltonians constructed from exceptional polynomials*, J. Phys. A: Math. Theor. **45** (2012), 405202.

[80] H. Rutishauser, *Lectures on numerical mathematics*, Birkhäuser, Boston, 1990.

[81] R. Sasaki, *Exactly solvable birth and death processes*, J. Math. Phys. **50** (2009), 103509.

[82] G. M. Schütz, *Exactly solvable models for many-body systems far from equilibrium*, Phase Transitions and Critical Phenomena (C. Domb and J. Lebowitz, eds.), **19**, Academic Press, London, 2001, pp. 1–251.

[83] H. Sekido, *An algorithm for calculating D-optimal designs for polynomial regression through a fixed point*, J. Stat. Plann. Inference **142** (2012), 935–943.

[84] H. Sekido, *An algorithm for calculating D-optimal designs for trigonometric regression through given points in terms of the discrete modified KdV equation*, J. Math-for-Indust. **4** (2012), 17–23.

[85] 關戸啓人, 離散可積分系と線形回帰モデルの D-optimal design, 九州大学応用力学研究所研究集会報告, **23AO-S7** (2012), 109–114.

[86] B. Simon, *Orthogonal polynomials on the unit circle part 1: Classical theory*, American Mathematical Society, Providence, RI, 2004.

[87] V. P. Spiridonov, S. Tsujimoto and A. S. Zhedanov, *Integrable discrete time chains for the Frobenius-Stickelberger-Thiele polynomials*, Comm. Math. Phys. **272** (2007), 139–165.

[88] V. Spiridonov and A. Zhedanov, *Discrete Darboux transformations, the discrete-time Toda lattice, and the Askey-Wilson polynomials*, Methods Appl. Anal. **2** (1995), 369–398.

[89] V. Spiridonov and A. Zhedanov, *Discrete-time Volterra chain and classical orthogonal polynomials*, J. Phys. A: Math. Gen. **30** (1997), 8727–8737.

[90] V. Spiridonov and A. Zhedanov, *Spectral transformation chains and some new biorthogonal rational functions*, Comm. Math. Phys. **210** (2000), 49–83.

[91] V. P. Spiridonov and A. S. Zhedanov, *To the theory of biorthogonal rational functions*, 数理解析研究所講究録, **1302** (2003), 172–192.

[92] W. J. Studden, *D_s-optimal designs for polynomial regression using continued fractions*, Ann. Statist. **8** (1980), 1132–1141.

[93] Y. B. Suris, *Integrable discretizations of the Bogoyavlensky lattices*, J. Math. Phys. **37** (1996), 3982–3996.

[94] G. Szegő, *Orthogonal polynomials*, American Mathematical Society, Providence, RI, 1939.

[95] D. Takahashi and J. Matsukidaira, *Box and ball system with a carrier and ultradiscrete modified KdV equation*, J. Phys. A: Math. Gen. **30** (1997), L733–739.

[96] D. Takahashi and J. Satsuma, *A soliton cellular automaton*, J. Phys. Soc. Japan **59** (1990), 3514–3519.

[97] 時弘哲治, 箱玉系の数理, 朝倉書店, 2010.

[98] T. Tokihiro, D. Takahashi, J. Matsukidaira and J. Satsuma, *From soliton equations to integrable cellular automata through a limiting procedure*, Phys. Rev. Lett. **76** (1996), 3247–3250.

[99] S. Tsujimoto, *On a discrete analogue of the two-dimensional Toda lattice hierarchy*, Publ. Res. Inst. Math. Sci. **38** (2002), 113–133.

[100] 辻本論, 離散戸田格子系列と直交多項式, 数理解析研究所講究録, **1280** (2002), 11–18.

[101] S. Tsujimoto, *Determinant solutions of the nonautonomous discrete Toda equation associated with the deautonomized discrete KP hierarchy*, J. Syst. Sci. Complex. **23** (2010), 153–176.

[102] S. Tsujimoto, R. Hirota and S. Oishi, *An extension and discretization of Volterra equation*, Tech. Report IEICE **NLP92-90** (1993), 1–3.

[103] 辻本論, 近藤弘一, 離散方程式の分子解と直交多項式, 数理解析研究所講究録, **1170** (2000), 1–8.

[104] S. Tsujimoto, Y. Nakamura and M. Iwasaki, *The discrete Lotka-Volterra system computes singular values*, Inverse Problems **17** (2001), 53–58.

[105] S. Tsujimoto, L. Vinet and A. Zhedanov, *Dunkl shift operators and Bannai–Ito polynomials*, Adv. Math. **229** (2012), 2123–2158.

[106] M. Uchiyama, T. Sasamoto and M. Wadati, *Asymmetric simple exclusion process with open boundaries and Askey-Wilson polynomials*, J. Phys. A: Math. Gen. **37** (2004), 4985–5002.

[107] W. van Assche, *Nearest neighbor recurrence relations for multiple orthogonal polynomials*, J. Approx. Theor. **163** (2011), 1427–1448.

[108] L. Vinet and A. Zhedanov, *How to construct spin chains with perfect state transfer*, Phys. Rev. A **85** (2012), 012323.

[109] E. P. Wigner, *Characteristic vectors of bordered matrices with infinite dimensions*, Ann. Math. **62** (1955), 548–564.

[110] E. P. Wigner, *On the distribution of the roots of certain symmetric matrices*, Ann. Math. **65** (1957), 325–327.

[111] J. Wishart, *The generalised product moment distribution in samples from a normal multivariate population*, Biometrika **20A** (1928), 32–52.

[112] A. Zhedanov, *The "classical" Laurent biorthogonal polynomials*, J. Comput. Appl. Math. **98** (1998), 121–147.

[113] A. Zhedanov, *Biorthogonal rational functions and the generalized eigenvalue problem*, J. Approx. Theory **101** (1999), 303–329.

前田 一貴 (非会員)　〒606-8501 京都市左京区吉田本町
2011 年京都大学大学院情報学研究科修士課程修了．修士（情報学）．現在，京都大学大学院情報学研究科博士後期課程在学中．日本学術振興会特別研究員 (DC1)．離散可積分系，超離散可積分系の理論とその応用に関する研究に従事．

三木 啓司 (非会員)　〒606-8501 京都市左京区吉田本町
2012 年京都大学大学院情報学研究科博士後期課程修了．博士（情報学）．現在，日本学術振興会特別研究員 (PD)．離散可積分系，直交多項式の理論とその応用に関する研究に従事．

辻本 諭 (正会員)　〒606-8501 京都市左京区吉田本町
1997 年早稲田大学大学院理工学研究科博士課程修了．博士（工学）．早稲田大学助手，大阪大学助手，京都大学講師を経て，現在は京都大学大学院情報学研究科准教授．離散可積分系，特殊関数および直交多項式の理論とその応用に関する研究に従事．日本数学会，日本物理学会，各会員．