応用代数学 第 1 回レポート課題

講義ページ：http://www-is.amp.i.kyoto-u.ac.jp/lab/tujimoto/appalg/

提出日：2016 年 11 月 18 日 (金), 21 日 (月) の 10 時から 16 時

提出場所：総合研究 10 号館 320A 号室の提出ボックス

注意事項

- レポートは A4 用紙を使用し, 表紙に学部・学科・コース・入学年・学籍番号・氏名を明記すること.
- 解答は結果だけでなく, そこに至った過程も書くこと.
- 各問題において, 単位元は e で表す.

問題 1

以下の集合 G と演算 $\circ$ が群をなすか調べよ. 群をなす場合はそれを示し, 群をなさない場合はその理由を述べよ.

(1) $G := \{x \in \mathbb{C} \setminus \{0\}\}$, $x \circ y := xy$ (通常の複素数の積)

(2) $G := \{x \in \mathbb{R}\}$, $x \circ y := (xy+1)(x+y)$

(3) $G := \{x \in \{0,1\}\}$, $x \circ y := x \wedge y$ (論理積)

(4) $G := \{x \in \{0,1\}\}$, $x \circ y := x \veebar y$ (排他的論理和)

(5) $G := \{X := \begin{pmatrix} x & -\sqrt{1-x^2} \\ \sqrt{1-x^2} & x \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R}, |x| \leq 1\}$, $X \circ Y := XY$ (通常の行列積)

備考

- (3), (4) においては 0 を偽, 1 を真とみなす.

問題 2

次の生成元と基本関係式で与えられる群を考える.

$$G = \langle a, b, c \mid a^3 = b^6 = c^2 = ab^2 = b^2a = acac = bcbc = e \rangle$$

(1) G のすべての元が $a^i b^j c^k$ $(i \in \{0,1,2\}, j \in \{0,1\}, k \in \{0,1\})$ の形で書けることを示せ.

(2) G のそれぞれの元の位数を求めよ.

(3) G の部分群をすべて書き下せ.

問題 3

次の 3×3 行列を考える.

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(1) 同型写像同士の合成もまた同型写像となることを示せ.

(2) 集合 $G = \{I, A, B, C, D, E\}$ は通常の行列積において群をなすことを示せ.

(3) 2 面体群 D_3 は次の生成元と基本関係式によって与えられる. G から D_3 への同型写像を与えよ.

$$D_3 = \langle a, b \mid a^3 = b^2 = abab = e \rangle$$

(4) 3 次対称群 S_3 は以下の巡回置換の集合をもつ群である. S_3 から G への同型写像を与えよ.

$$S_3 = \{e, (1,2), (1,3), (2,3), (1,2,3), (1,3,2)\}$$

(5) S_3 から D_3 への同型写像を与えよ.