応用可積分系への招待

前田一貴（数理工学専攻 数理解析分野）<kmaeda@amp.i.kyoto-u.ac.jp>

■ まず「可積分系」とは？

せき-ぶん【積分】微分方程式の解を求めること．求積．

微分方程式論の復習

▷ 線型常微分方程式:

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + c_1\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + c_0x = 0, \quad x = x(t).$$

→ 解は $\mathrm{e}^{t\lambda_+}$ と $\mathrm{e}^{t\lambda_-}$ の線型結合で書ける．ただし $\lambda_\pm = \frac{-c_1 \pm \sqrt{c_1^2 - 4c_0}}{2}$.

▷ 非線型常微分方程式:

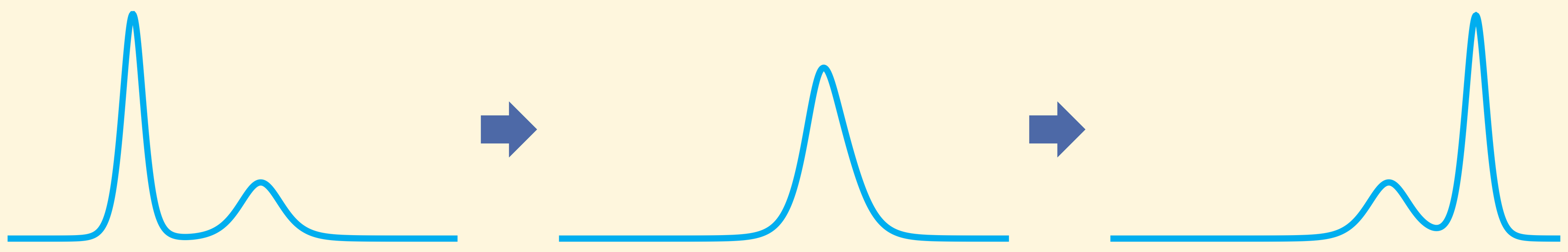
$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = x(1-x), \quad x = x(t).$$

→ **非線型方程式は解けない？** 実はこの方程式の場合は変数変換 $x(t) = \frac{1}{1-z(t)}$ により，**線型方程式に帰着して解くことができる！**（この方程式は**ロジスティック方程式**と呼ばれる．）

一般に非線型の微分方程式で記述される系はカオス的な振る舞いを示す（解けない）ことが多いが，そのうちの一部はなんらかの方法で解けて，面白い性質を示すことがある．

ソリトン

可積分系理論の主対象は，**ソリトン（孤立波）解**と呼ばれる解を具体的に与えることができる非線型系の一群である．



以下が代表的なソリトン方程式である．

▷ **KdV 方程式**:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + 6u\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0, \quad u = u(t,x).$$

▷ **戸田格子**:

$$\frac{\mathrm{d}^2 q_n}{\mathrm{d}t^2} = \mathrm{e}^{q_{n-1}-q_n} - \mathrm{e}^{q_n - q_{n+1}}, \quad q_n = q_n(t).$$

▷ **Lotka-Volterra 方程式**:

$$\frac{\mathrm{d}v_n}{\mathrm{d}t} = v_n(v_{n-1} - v_{n+1}), \quad v_n = v_n(t).$$

これらの解を求めるには**双線型化**と呼ばれる手法を用いる．

■ 離散可積分系

非線型の離散時間方程式にも具体的なソリトン解を持つものがある．

なぜ離散か？

▷ 数値シミュレーションをするとき，連続系のままではコンピュータの上に載せることができないので，なんらかの**離散化**が必要である．

▷ 離散化の方法としては前進差分，中心差分などが代表的だが，このやり方によって得られる離散系の性質は全く変わってくる（**ロジスティック方程式の離散化**が有名）．これを逆に，ある連続系に極限で移行する離散系はいくらでもあると見ることもできる．この意味で，**離散系の世界は連続系の世界よりも広く豊か**であると言える．

離散可積分系は，連続可積分系の**可積分性を保つように離散化する**ことで得られる．この際，連続系の解を求めるのに用いた双線型化が大きな役割を果たす．

▷ **離散 KdV 方程式**:

$$\frac{1}{u_n^{(t+1)}} - \frac{1}{u_n^{(t)}} = \frac{\delta}{1+\delta}\left(u_{n+1}^{(t+1)} - u_{n-1}^{(t)}\right).$$

▷ **離散 Lotka-Volterra 方程式**:

$$\frac{v_n^{(t+1)}}{v_n^{(t)}} = \frac{1 + \delta v_{n-1}^{(t)}}{1 + \delta v_{n+1}^{(t+1)}}.$$

■ では「応用」とは？

可積分系を**離散化**することで**応用**が見えてくる．

行列固有値・特異値計算アルゴリズム

以下の漸化式は N 次三重対角行列の固有値を計算するアルゴリズムを与える:

$$q_n^{(t+1)} = q_n^{(t)} - e_n^{(t+1)} + e_{n+1}^{(t)}, \quad e_n^{(t+1)} = e_n^{(t)}\frac{q_n^{(t)}}{q_{n-1}^{(t+1)}}, \quad e_0^{(t)} = e_N^{(t)} = 0.$$

▷ Rutishauser による **qd アルゴリズム**

▷ 一方で，この式は**戸田格子の離散版**でもある．

また，qd アルゴリズムの改良版である **dqds アルゴリズム**と**非自励離散戸田格子**が対応することもわかっている．

➡ **逆に，可積分系からアルゴリズムが作れないか？**

中村・辻本研究室での成果

▷ **離散 Lotka-Volterra 方程式によって特異値計算が可能**

▷ 加速パラメータを導入した **mdLVs アルゴリズム**を定式化

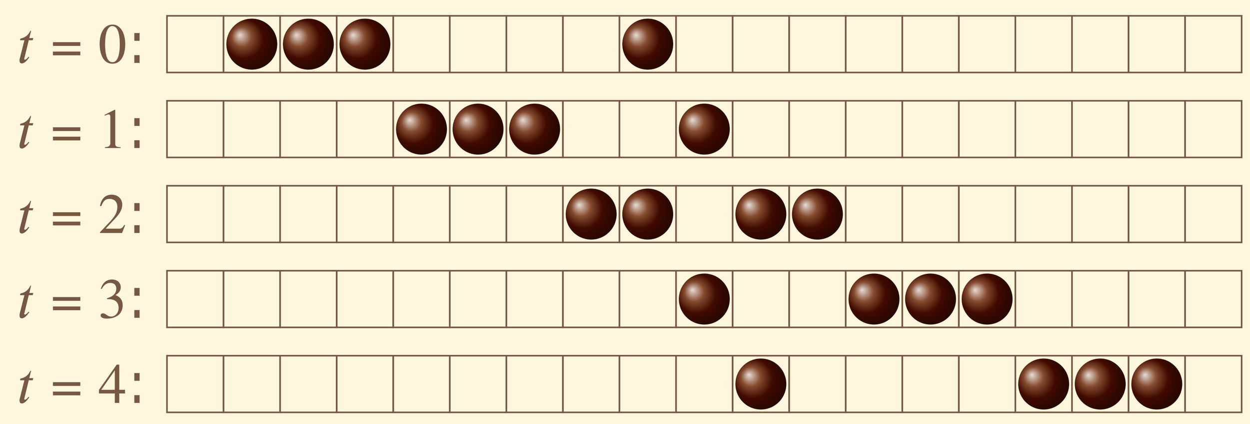
▷ 特異ベクトル計算部を加えた **I-SVD アルゴリズム**を開発（**ライブラリを研究室 Web サイトで公開中**）

▷ 書籍：中村佳正，可積分系の機能数理，共立出版，2006

現在も更なる高速化・高精度化を目指して，**数学・計算科学の両面から**研究を継続中．**可積分系発の新たなアルゴリズムの開発**も模索中．

箱玉系

簡単なルールに従って箱に入った玉を動かすことでソリトンの振る舞いを再現できる，**ソリトン・セルオートマトン**の一種．



実は**超離散化**と呼ばれる操作によって**離散 KdV 方程式**や**離散戸田格子**と関係することが知られている．

発表者による最近の研究

▷ **非自励離散戸田格子（dqds アルゴリズム）**と対応する箱玉系は？

▷ 既知の拡張箱玉系と戸田型可積分系との関係は？

▷ **箱玉系を考えることでアルゴリズムが作れないか？**

その他のテーマ

▷ 数列の加速法，Padé 近似などのアルゴリズム

▷ 直交関数系，特殊関数などの応用数学

▷ 実験計画，交通流，待ち行列などの数理計画問題

▷ 経路の数え上げなどの組み合わせ論の問題

中村・辻本研究室への誘い

✓ **数学の情報学・工学への応用**に興味のある方．

✓ **計算科学**を本格的に学び，研究してみたい方．

✓ **可積分系の数理**（代数構造・対称性など）に興味がある方．

ぜひ下記 Web サイトもご覧下さい．研究室に関する詳しい情報，デモプログラム等があります．

✓ **中村・辻本研究室**: http://www-is.amp.i.kyoto-u.ac.jp/

✓ **前田のページ**: http://www-is.amp.i.kyoto-u.ac.jp/kmaeda/